

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CALCULS POUR LA MISE À JOUR DE PLANS DE VOL

ABDERRAZAK MOUTASSIM

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES)  
AVRIL 2016

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

CALCULS POUR LA MISE À JOUR DE PLANS DE VOL

présenté par : MOUTASSIM Abderrazak

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

Mme YACOUT Soumaya, D. Sc., président

M. DUFOUR Steven, Ph. D., membre et directeur de recherche

M. PERRON Sylvain, Ph. D., membre et codirecteur de recherche

M. SAUSSIÉ David, Ph. D., membre

**DÉDICACE**

*Je dédie ce mémoire à mes parents à qui je dois ce savoir,  
à Aziz, Meriem et à mes frères décédés,  
à mes enfants Afaf, Ali et à Amal.*

## REMERCIEMENTS

Je remercie mes directeurs de recherche, M. Steven Dufour et M. Sylvain Perron pour leur engagement et leur confiance qu'ils ont manifestés tout au long de mes travaux de maîtrise. L'aide financière que le projet CRSNG-CRIAQ sur l'optimisation des trajectoires aériennes m'a accordée est également appréciée. Je remercie aussi Charles Pestieau d'avoir contribué à ce que mon projet de maîtrise progresse plus rapidement.

J'aimerais aussi remercier les membres du jury, Mme Soumaya Yacout et M. David Saussié, de bien vouloir accepter de faire l'évaluation du travail de cette maîtrise.

Je suis aussi reconnaissant envers ma mère, mon frère et ma femme pour leurs encouragements, ainsi que pour leur soutien psychologique et financier qui m'ont permis de maintenir le rythme et d'être à la hauteur pour surmonter les difficultés de toutes les étapes de ma maîtrise.

Mes remerciements vont aussi à tous mes collègues du laboratoire, à tous les professeurs et à tout le personnel du Département de mathématiques et de génie industriel ainsi que de l'École Polytechnique de Montréal.

## RÉSUMÉ

Nous présentons dans ce mémoire des techniques de calcul pour la mise à jour des plans de vol pour la phase de croisière. Nous déterminons de nouvelles trajectoires en mettant à jour les paramètres de vol. Pour le calcul, nous avons utilisé le modèle BADA proposé par Eurocontrol qui est basé sur l'équation de l'énergie totale. Le calcul du coût total de la trajectoire optimale est basé sur le calcul du coût de chaque arc de cette trajectoire et ne tient pas compte du coût du temps. Le coût du carburant est le seul coût qu'on a considéré dans l'optimisation des trajectoires. La précision du calcul de ces coûts dépend de la qualité des paramètres du modèle BADA. Notre premier objectif pour le calcul de la mise à jour des plans de vol est d'implanter les algorithmes de calcul dans le sens du vol. La précision de ces calculs est comparée avec une autre méthode de calcul qui se fait dans le sens inverse du vol (méthode de calcul à rebours). Dans cette comparaison, nous vérifions que l'altitude est le paramètre le plus important des calculs.

Les calculs de la mise à jour des plans de vol doivent être précis et rapides. Nous vérifions ces calculs à l'aide de la discrétisation des équations différentielles de la modélisation présentée. Cette analyse est basée sur le choix de la taille des pas d'intégration et sur le choix des schémas numériques utilisés pour le calcul des coûts des trajectoires. La phase de croisière permet de bien étudier le compromis entre le temps de calcul et la précision des calculs.

Parmi les paramètres qui influencent les calculs de la mise à jour des plans de vol, il y a les paramètres liés à la météo. Ils peuvent être obtenus de différentes sources : du modèle atmosphérique ISA (International Standard Atmosphere) ou des fichiers de prévisions météorologiques. La précision de ces données influencent le calcul des trajectoires. Nous analysons les calculs de consommation et les profils des trajectoires pour déterminer les données météo qui permettent d'optimiser la précision des calculs tout en donnant une trajectoire réaliste du point de vue du pilotage et de la gestion du trafic aérien.

## ABSTRACT

In this project, we propose techniques for computing flight plan updates for the cruise phase. We determine new flight paths by updating the flight parameters. Our approach is based on the BADA model proposed by Eurocontrol which is based on the total energy equation. The cost of the trajectories is computed using the cost of each arc of the path. The total cost of the optimal path does not include the cost of time. The cost of fuel is the only cost we consider for optimizing trajectories. The accuracy of the cost computations depends on the quality of the parameters of the BADA model. Our forward approach for computing flight plan updates is to implement the algorithms in the direction of the flight. The accuracy of this method is compared with another method which is performed in the opposite direction of the flight (backward calculation method). In this comparison, we verify that the altitude is the most important parameter for these calculations.

The computation of a flight plan update is characterized by its accuracy and its execution time. We verify these calculations by discretizing the differential equations of the proposed model. This analysis is based on the choice of the time-step size and on the choice of the numerical methods for the computation of the cost of fuel. The cruise phase allows the study of the compromise between computation time and the accuracy of the computations.

Among the parameters that influence flight path update calculations, we denote the parameters related to weather conditions. Weather data can be obtained from different sources : from the ISA atmospheric model (International Standard Atmosphere) or from weather forecast files. The accuracy of the data influence computed trajectories. We analyze fuel consumption calculations and the computed trajectories to determine the weather data that will optimize the accuracy of the calculations and that will give realistic flying trajectories, acceptable to pilots and to air Traffic Management.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	iii
REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	v
ABSTRACT . . . . .	vi
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	vii
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	x
LISTE DES FIGURES . . . . .	xi
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS . . . . .	xiii
CHAPITRE 1 INTRODUCTION . . . . .	1
1.1 Contexte général du projet . . . . .	1
1.2 Cadre de recherche du projet . . . . .	2
1.2.1 Définitions et concepts de base . . . . .	2
1.2.2 Objectifs spécifiques . . . . .	4
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE . . . . .	8
CHAPITRE 3 CALCUL DES TRAJECTOIRES POUR LA MISE À JOUR D'UN PLAN DE VOL EN CROISIÈRE . . . . .	11
3.1 Introduction . . . . .	11
3.2 Modèles pour le calcul du coût de carburant . . . . .	12
3.2.1 Modèle d'énergie totale . . . . .	12
3.2.2 Modèle aérodynamique . . . . .	14
3.2.3 Système d'équations à discrétiser . . . . .	16
3.2.4 Discrétisation du système d'équations différentielles . . . . .	17
3.3 Discrétisation des équations différentielles . . . . .	17
3.3.1 Segment à vitesse et à altitude constantes . . . . .	18
3.3.2 Segment d'accélération . . . . .	18

3.3.3	Segment d'ascension . . . . .	18
3.3.4	Nouvelles variables d'intégration du système d'équations différentielles . .	19
3.4	Calcul du coût de la trajectoire optimale . . . . .	21
3.4.1	Grille de nœuds isobariques (grille NISB) . . . . .	21
3.4.2	Interpolation linéaire des données de la grille NISB vers la grille par niveaux d'altitude (grille de calcul) . . . . .	22
3.4.3	Calcul du coût des arcs de la trajectoire optimale . . . . .	22
3.4.4	Programme de calcul de la trajectoire optimale . . . . .	23
3.5	Comparaison de la méthode de calcul direct (vers l'avant) avec la méthode de calcul à rebours (vers l'arrière) . . . . .	24
3.5.1	Comparaison sur la phase de croisière . . . . .	24
3.5.2	Résultats du calcul direct et du calcul à rebours de la consommation . . . .	26
3.6	Explication détaillée des différences de consommation . . . . .	29
3.6.1	Le calcul direct et le calcul à rebours . . . . .	29
3.6.2	Vérification et analyse des consommations du calcul direct et du calcul à rebours . . . . .	31
3.6.3	Comparaison de consommations sur les arcs de montée des trajectoires du calcul direct et du calcul à rebours . . . . .	34
3.7	Conclusion . . . . .	36

## CHAPITRE 4 OPTIMISATION DE LA PRÉCISION ET DU TEMPS DE CALCUL

	POUR LA PHASE DE CROISIÈRE . . . . .	37
4.1	Introduction . . . . .	37
4.2	Analyse numérique des calculs . . . . .	37
4.2.1	Le calcul des coûts sur les différents segments . . . . .	38
4.2.2	Schémas numériques . . . . .	39
4.2.3	Erreur sur le calcul de la consommation et vérification de la convergence des schémas sur les segments de calcul . . . . .	41
4.3	Choix de la stratégie de discrétisation sur la phase de croisière . . . . .	45
4.3.1	Les calculs sur la phase de croisière . . . . .	45
4.3.2	Choix des schémas . . . . .	45
4.3.3	Stratégie de discrétisation . . . . .	47
4.3.4	Résultats sur la phase de croisière . . . . .	48
4.3.5	Interprétation des résultats . . . . .	49
4.4	Conclusion . . . . .	53



CHAPITRE 5	LA MÉTÉO ET LE CALCUL DES TRAJECTOIRES	
	EN PHASE DE CROISIÈRE . . . . .	54
5.1	Introduction . . . . .	54
5.2	Le modèle atmosphérique ISA et la météo issue des fichiers GRIB . . . . .	55
5.2.1	Le modèle atmosphérique ISA . . . . .	55
5.2.2	Fichiers GRIB . . . . .	56
5.3	Définition de nouveaux types de météo . . . . .	59
5.4	Présentation des calculs en utilisant les différents types de météo . . . . .	59
5.5	Étude comparative des calculs selon le choix des champs météo . . . . .	65
5.5.1	Choix du champ de l'humidité relative dans les calculs de trajectoires . . . . .	65
5.5.2	Choix du champ de pression dans les calculs de trajectoires . . . . .	67
5.5.3	Choix du champ de température dans les calculs de trajectoires . . . . .	69
5.5.4	Choix du champ des vents dans les calculs de trajectoires . . . . .	72
5.6	Conclusion . . . . .	74
CHAPITRE 6	CONCLUSION . . . . .	75
6.1	Synthèse des travaux . . . . .	75
6.2	Limitations de la solution proposée . . . . .	76
6.3	Améliorations futures . . . . .	76
RÉFÉRENCES	. . . . .	77

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1	Comparaison des consommations (altitude et vitesse constantes). . . . .	27
Tableau 3.2	Comparaison des consommations (changement d'altitude et de vitesse). . .	29
Tableau 3.3	Choix des paramètres de vol pour le calcul direct. . . . .	32
Tableau 3.4	Nouvelles consommations calculées avec le calcul direct . . . . .	32
Tableau 4.1	Les variables sur le segment d'accélération. . . . .	38
Tableau 4.2	Les variables sur le segment de changement d'altitude . . . . .	39
Tableau 4.3	Estimation de l'ordre de convergence des schémas d'intégration. . . . .	45
Tableau 4.4	Erreurs obtenues sur la consommation suite aux calculs numériques et leur pourcentage par rapport à la consommation totale pour tout le vol et pour la croisière. . . . .	48
Tableau 4.5	Réductions des temps de calcul des schémas et des temps de calcul totaux.	49
Tableau 4.6	Les procédures proposées pour accélérer chaque composante des calculs. .	52
Tableau 5.1	Les types de météo utilisés pour les calculs. . . . .	59
Tableau 5.2	Calculs de consommation avec les différents types de météo. . . . .	60
Tableau 5.3	Calculs de consommation avec les différents types de météo. . . . .	61
Tableau 5.4	Les écarts de consommation calculés avec la prévision 1. . . . .	62
Tableau 5.5	Les écarts de consommation calculés avec la prévision 2. . . . .	64
Tableau 5.6	Les écarts de consommation et de temps de vol pour le cas de l'humidité relative. . . . .	66
Tableau 5.7	Les écarts de consommation et de temps de vol pour le cas du choix de la pression. . . . .	68
Tableau 5.8	Les écarts de consommation et de temps de vol pour le cas du choix de la température. . . . .	70
Tableau 5.9	Les écarts de consommation et de temps de vol pour le cas du choix du vent.	73

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Graphe orienté acyclique (DAG). . . . .	5
Figure 3.1	Partie de la grille de nœuds isobarométriques (grille NISB). . . . .	21
Figure 3.2	Partie de la grille de calcul. . . . .	22
Figure 3.3	Arc de montée sur la grille de calcul. . . . .	23
Figure 3.4	Organigramme du programme de calcul des trajectoires optimales. . . . .	23
Figure 3.5	Calculs direct et à rebours sur une partie de la phase de croisière. . . . .	25
Figure 3.6	Scénarios de changements d'altitude. . . . .	28
Figure 3.7	Scénarios d'un arc de montée de 33 000 pi à 35 000 pi. . . . .	30
Figure 3.8	Scénarios d'un arc de descente de 35 000 pi à 33 000 pi. . . . .	30
Figure 3.9	Consommations obtenues pour le cas de la montée. . . . .	31
Figure 3.10	Les étapes du calcul direct avec les paramètres du calcul à rebours. . . . .	32
Figure 3.11	Les distances parcourues pour le scénario de la descente. . . . .	34
Figure 3.12	La montée optimale par rapport aux calculs direct et à rebours. . . . .	35
Figure 3.13	Les étapes du nouveau calcul à rebours. . . . .	35
Figure 3.14	Les étapes du nouveau calcul direct. . . . .	36
Figure 4.1	Phase de croisière de la trajectoire. . . . .	38
Figure 4.2	Approximation de l'erreur sur le calcul de la consommation en fonction du nombre de pas d'intégration, sur un segment d'accélération de longueur $\delta V = 1$ m/s. . . . .	42
Figure 4.3	Approximation de l'erreur sur le calcul de la consommation en fonction du nombre de pas d'intégration, sur un segment de changement d'altitude de longueur $\delta h = 2\,000$ pi. . . . .	42
Figure 4.4	Approximation de l'erreur sur le calcul de la consommation en fonction du nombre de pas d'intégration, sur un segment à vitesse et à altitude constantes de longueur $\delta x = 55,55$ km. . . . .	43
Figure 4.5	Approximation de l'erreur sur le calcul de la consommation en fonction du nombre de pas d'intégration, sur un segment à vitesse et à altitude constantes de longueur $\delta x = 111,11$ km. . . . .	43
Figure 4.6	Courbes log-log de l'erreur sur le segment de changement d'altitude. . . . .	44
Figure 4.7	Les arcs évalués sur la phase de croisière à un niveau de longitude. . . . .	46
Figure 4.8	Choix de la stratégie de discrétisation sur une trajectoire de la croisière. . . . .	47
Figure 4.9	Un arc de changement d'altitude de 1 degré de longitude et de latitude représenté sur une grille fine ( $0,25^\circ$ ). . . . .	51

Figure 5.1	Les messages par niveau de pression d'un fichier GRIB. . . . .	57
Figure 5.2	Schéma du programme DEGRIB . . . . .	58
Figure 5.3	Profils verticaux des trajectoires calculées avec la prévision 1. . . . .	63
Figure 5.4	Profils verticaux des trajectoires calculées avec la prévision 2. . . . .	64
Figure 5.5	Comparaison 1 des calculs 1 et 2 avec l'humidité relative. . . . .	65
Figure 5.6	Comparaison 2 des calculs 1 et 2 avec l'humidité relative. . . . .	66
Figure 5.7	Comparaison 1 des calculs 1 et 2 pour la pression. . . . .	67
Figure 5.8	Comparaison 2 des calculs 1 et 2 pour la pression. . . . .	67
Figure 5.9	Comparaison 1 des calculs 1 et 2 pour la température. . . . .	69
Figure 5.10	Comparaison 2 des calculs 1 et 2 pour la température. . . . .	69
Figure 5.11	Profil vertical d'une trajectoire lisse. . . . .	71
Figure 5.12	Profil vertical d'une trajectoire non lisse. . . . .	71
Figure 5.13	Comparaison 1 des calculs 1 et 2 pour les vents. . . . .	72
Figure 5.14	Comparaison 2 des calculs 1 et 2 pour les vents. . . . .	73

## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

ATC	<i>Air Traffic Control</i>
ATM	<i>Air Traffic Management</i>
BADA	<i>Base of Aircraft Data</i>
CAS	<i>Calibrated Air speed</i>
CF	<i>Cost of Fuel</i>
CI	<i>Cost Index</i>
CRIAQ	Consortium de recherche et d'innovation en aérospatiale au Québec
CSV	<i>Comma-Separated Values</i>
CT	<i>Cost of Time</i>
DAG	<i>Directed Acyclic Graph</i>
ESF	<i>Energy Share Factor</i>
FF	<i>Fuel Flow</i>
FL	<i>Flight Level</i>
FMS	<i>Flight Management System</i>
GFS	<i>Global Forecast System</i>
GRIB	<i>GRIdded Binary</i>
IATA	<i>International Air Transport Association</i>
ISA	<i>International Standard Atmosphere</i>
NASA	<i>National Aeronautics and Space Administration</i>
NCAL	Nœuds de la grille de calcul
NISB	Nœuds isobarométriques
NOAA	<i>National Oceanic and Atmospheric Administration</i>
OACI	Organisation de l'aviation civile internationale
OPF	<i>Operation Performance File</i>
PCC	Plus court chemin
PIB	Produit intérieur brut
RAAS	Roy Aéronef et Avionique Simulation
RK2	Runge-Kutta d'ordre 2
RK4	Runge-Kutta d'ordre 4
TAS	<i>True Air Speed</i>
TOC	<i>Top Of Climb</i>
TOD	<i>Top Of Descent</i>

## CHAPITRE 1

### INTRODUCTION

#### 1.1 Contexte général du projet

« Le transport aérien joue aujourd'hui un rôle majeur comme moteur de développement économique et social durable. Il emploie directement et indirectement 56,6 millions de personnes, contribue pour 2,2 billions de dollars au produit intérieur brut (PIB) mondial et transporte annuellement plus de 2,9 milliards de passagers et pour 5,3 billions de dollars de fret », d'après l'OACI<sup>1</sup>. Ceci montre que le trafic aérien mondial est devenu de plus en plus important. Le transport aérien requiert donc le renforcement de la sécurité de l'aviation civile à l'échelle mondiale, l'accroissement des capacités sectorielles nécessaires pour les prochaines années et l'amélioration des systèmes de navigation. On ajoute à ces enjeux, la protection de l'environnement qui consiste à limiter le plus possible les effets néfastes des activités de l'aviation civile sur l'environnement. Pour aborder ces enjeux, un système mondial de navigation aérienne est mis en place en faisant appel à des procédures et des technologies modernes. L'OACI en collaboration avec GANIS<sup>2</sup> (Global Air Navigation Industry Symposium) propose une méthode de mise à niveau par blocs de ce système et sera adoptée dans le cadre du plan mondial de la navigation aérienne (GANP - Global Air Navigation Plan) qui est prévu dans 15 ans. Parmi les domaines à améliorer dans ce plan mondial, nous citons le calcul de trajectoires de vol efficaces<sup>3</sup>. Pour que les compagnies aériennes puissent supporter les coûts de retard causés par les congestions dans certains secteurs de la navigation et pour que l'environnement soit protégé des émissions gazeuses indésirables, des trajectoires efficaces devront être calculées de telle sorte que le coût total du vol soit minimal. Le coût total comprend le coût du carburant consommé et le coût du temps de vol. Dans la cadre de ce projet, nous présentons des calculs de trajectoires efficaces du point de vue de la précision du calcul et du point de vue de la minimisation des coûts de consommation du carburant. Par la suite, nous allons définir les concepts de base et les objectifs spécifiques du projet.

---

1. <http://www.oaci.int>

2. <http://www.icao.int/Meetings/AMC/GANIS>

3. [http://www.icao.int/wacaf/Documents/edocs/9750\\_cons\\_fr.pdf](http://www.icao.int/wacaf/Documents/edocs/9750_cons_fr.pdf)

## 1.2 Cadre de recherche du projet

Le travail de recherche présenté dans ce mémoire est lié à l'axe de recherche sur l'optimisation de la mise à jour en route des trajectoires de plans de vol. Il fait partie du plus grand projet OPR-601 du CRIAQ<sup>4</sup> (Consortium de recherche et d'innovation en aérospatiale au Québec) sur l'optimisation des trajectoires de vol qui est réalisé avec la collaboration de trois entreprises du secteur aérien : Thales Canada, Air Canada et Roy aéronef et avionique simulation (RAAS<sup>5</sup>) - en partenariat avec des équipes de recherche de Polytechnique Montréal et HEC Montréal.

L'objectif général de ce projet de maîtrise est de proposer des méthodologies de calcul de trajectoires aériennes dans le contexte de la mise à jour de plans de vol en route en tenant compte de changements dans les conditions d'un vol, e.g. les conditions météorologiques, un retard au départ ou à l'arrivée, une modification de plan de vol imposée par le contrôle aérien. Avant de présenter la méthodologie pour atteindre les objectifs spécifiques associés aux éléments de ce travail de recherche, nous allons d'abord définir certains concepts reliés au cadre d'étude du projet.

### 1.2.1 Définitions et concepts de base

Nous introduisons quelques définitions et concepts qui sont en lien avec le champ d'étude de notre travail de recherche. Nous définissons pour cela le plan de vol d'un avion et le système de gestion de vol (Flight Management System, FMS).

#### Plan de vol

Lorsqu'un avion se prépare pour effectuer un vol d'un aéroport de départ à un aéroport d'arrivée, « un plan de vol doit être déposé, afin d'en informer les services de la navigation aérienne. Ce dernier contient tous les éléments indicatifs décrivant le vol prévu, notamment :

- Le type d'avion ;
- L'heure de départ ;
- Le premier niveau de vol demandé pour la croisière. Le niveau de vol est défini comme étant l'altitude lue sur un altimètre calé sur la surface isobare 1 013 mb. Il est exprimé en centaines de pieds (1 ft = 0,3048m), ainsi une différence de 5 000 pieds par rapport à cette surface produira le niveau de vol FL50 (Flight Level) ;
- L'équipement de bord ;
- La route prévue : elle est décrite par une série de balises. » Dougui et al. (2013).

---

4. <http://www.criq.aero>

5. <http://www.raasi.ca>

- Les aéroports de départ et d'arrivée ;
- La date et l'heure de départ prévues ;
- La masse de l'avion sans carburant ;
- La date et l'heure d'arrivée ;

Le plan de vol est une description détaillée de la route à suivre par un avion dans le cadre d'un vol planifié. Il comporte notamment une séquence chronologique de points de passage (« waypoints ») décrits par leur position, leur altitude, leur vitesse et leur heure de survol. Ces points de passage constituent la trajectoire de référence à suivre par l'avion en vue de respecter au mieux son plan de vol (Coulmeau et al. (2014)). Également, un plan de vol fournit un profil vertical de vol pour les différentes phases de vol de l'avion, typiquement la phase de montée (CLB), la phase de croisière (CRZ) et la phase de descente (DES) (cf. fig.1 tirée de Coulmeau et al. (2013a)). Pour suivre son plan de vol, un avion utilise son système de gestion de vol FMS (Flight Management System), dont le fonctionnement sera décrit au paragraphe suivant.

### Système de gestion de vol

« Le système de gestion de vol (FMS) est un système embarqué de gestion de vol qui intègre des informations sur la performance de l'avion et sur sa position provenant des capteurs de navigation, du plan de vol stocké et des saisies manuelles. Compte tenu du plan de vol et de la position de l'avion, le FMS calcule la route à suivre et permet de modifier le plan de vol pour diverses raisons telles que des mauvaises conditions atmosphériques, des retards ou des contraintes imposées par la gestion du trafic aérien (Air Traffic Management, ATM). Il permet ainsi d'insérer ou de modifier les procédures de départ (Standard Instrument Departure, SID) ou d'arrivée (Standard Terminal Arrival, STAR), d'insérer un point de report ou un circuit d'attente, de changer de destination, etc. (Dougui et al. (2013)). À partir des points de passage du plan de vol, le FMS calcule une trajectoire latérale. Il calcule un profil vertical à partir du niveau de croisière et des contraintes d'altitude. Finalement, à partir des contraintes de vitesse, des vitesses optimisées de chaque phase de vol et du coût du temps (appelé « Cost Index<sup>6</sup> ») choisi par la compagnie aérienne, le FMS calcule un profil de vitesse. Les étapes de calcul du profil de vitesse sont les suivantes :

- Pour le décollage (du lâcher des freins à l'altitude d'accélération) : calcul des vitesses d'exploitation (rentrée des becs et volets, etc) ;
- Pour la montée (de l'altitude d'accélération à l'altitude de croisière) : calcul de la vitesse économique CAS<sup>7</sup> (Calibrated Air speed) puis le Mach<sup>8</sup> et du point de transition de la

---

6. Le rapport entre le coût d'opération d'une heure de vol et le coût unitaire du carburant, en (heure / kg).

7. La vitesse indiquée par un indicateur conventionnel de vitesse, après correction de l'erreur des instruments.

8. Le rapport de la vitesse aérodynamique de l'avion à la vitesse du son.



- phase de montée vers la phase de croisière (Top Of Climb, TOC) ;
- Pour la croisière (du TOC au point de début de la descente (Top Of Descent, TOD)) : calcul de la vitesse économique (Mach) en fonction du niveau de croisière ;
- Pour la descente (du TOD au point de décélération) : calcul d'une vitesse économique (Mach puis CAS) correspondant à une poussée réduite et au profil d'altitude associé ;
- Pour l'approche (du point de décélération à l'atterrissage) : calcul du profil de décélération respectant les contraintes d'exploitation (suivi de la trajectoire, sortie des becs et volets) pour atteindre la vitesse d'approche finale. » Dougui et al. (2013).

### **Mise à jour du plan de vol**

La mise à jour d'un plan de vol consiste à modifier les vitesses, les altitudes et les contraintes horaires sur une balise ou un point particulier. Les éléments déclencheurs de la mise à jour d'un plan de vol pour les phases de montée, de croisière et de descente sont les suivants :

- La modification de la vitesse en un certain point (vitesse ou altitude imposée par les membres de l'équipage ou par l'ATC (Air Traffic Control) ;
- Le respect d'une contrainte horaire sur une balise ;
- Des événements météorologiques ;
- Un plan de vol imposé par l'ATC.

Une trajectoire optimale est une suite de segments qui sera déterminée par le FMS à partir des données d'un vol désigné. Cette trajectoire doit minimiser les coûts en considérant :

- Le prix du carburant ;
- Les coûts d'opération ;
- Le coût du retard à l'arrivée ;
- Le coût de survol des territoires aériens ;
- Les conditions météorologiques ;
- Les zones interdites ;
- Les limitations de vitesse et d'altitude dans certaines régions.

Le coût d'une trajectoire de vol est la somme du coût du carburant et du coût du temps. À la sous-section suivante, nous allons énumérer les éléments que nous allons aborder dans ce document.

#### **1.2.2 Objectifs spécifiques**

On veut élaborer une méthode de calcul pour la mise à jour des plans de vol en déterminant pour chaque point de la trajectoire les paramètres tels que la masse de l'avion, sa vitesse et son altitude. Nous effectuons ce calcul dans le sens du vol (calcul vers l'avant) puisque dans ce cas, la

masse de départ de l'avion, sa vitesse et son altitude sont connues. Contrairement à la méthode de calcul proposée dans Maazoun (2015) où le calcul se fait dans le sens inverse du vol (calcul à rebours). Pour chacun des points de la trajectoire optimale, la mise à jour est faite pour déterminer la route qui sera prise par l'avion. Cette trajectoire est déterminée en tenant compte des données atmosphériques (température, vents, pression et humidité relative) et des consignes imposées par les contrôleurs aériens. Comme premier objectif, nous proposons une méthode de calcul pour la mise à jour des plans de vol sur la phase de croisière. Nous vérifierons les calculs de cette méthode en les comparant avec les calculs à rebours. Pour les deux méthodes de calcul, nous allons utiliser les données atmosphériques du modèle ISA (International Standard Atmosphere). Le deuxième objectif est de faire un calcul de mise à jour des plans de vol qui soit précis par rapport à une certaine tolérance et qui nécessite un temps de calcul minimal. Comme dernier objectif de ce projet, nous effectuons les calculs à nouveau en considérant les données météo issues de fichiers de prévisions météorologiques. Dans ce qui suit, nous spécifions les composantes qui entrent dans la méthodologie de calcul proposée.

### Calcul des trajectoires pour la mise à jour d'un plan de vol en croisière

Nous effectuons le calcul du coût sur chaque arc de la trajectoire du plan de vol pour déterminer le coût total de la trajectoire. Plus précisément, à partir d'un nœud de départ d'un arc qui se trouve à une certaine altitude, où l'on connaît aussi la masse et la vitesse de l'avion, nous calculons la consommation de carburant pour atteindre le nœud d'arrivée de cet arc. La mise à jour se fait de telle sorte que la trajectoire du vol soit optimale.

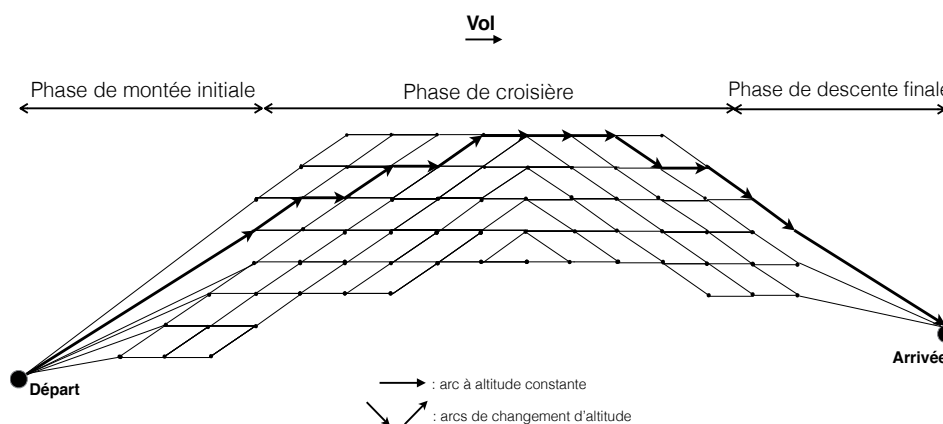


Figure 1.1 Graphe orienté acyclique (DAG).

La détermination de cette trajectoire optimale revient à chercher le chemin le plus court dans un graphe acyclique qu'on illustre à la figure 1.1. Nous illustrons sur cette figure un exemple de trajectoire optimale qu'on souhaite déterminer (trajectoire avec des flèches en gras).

Les nœuds de ce graphe sont les extrémités de chacun des arcs. Les arcs du graphe contiennent les arcs de la trajectoire recherchée. Le calcul de la trajectoire optimale se fait à l'aide de l'algorithme du plus court chemin (algorithme de Dijkstra). Pour ce faire, il faut construire le graphe pour le calcul de mise à jour, i.e. associer un coût à chaque arc du graphe et lancer l'algorithme du plus court chemin pour déterminer la trajectoire optimale. À partir d'un nœud source, nous évaluons le coût d'un arc et on enregistre le coût cumulé au nœud destination. Les calculs numériques des coûts de chacun des arcs se font à l'aide de la discrétisation d'un système d'équations différentielles (3.2.3) lié au modèle proposé. Dans un premier temps, il faut choisir un schéma numérique pour les équations différentielles et vérifier les calculs numériques en analysant la convergence de l'erreur de calcul de ce schéma. Le calcul de la trajectoire de la mise à jour est aussi vérifié en comparant ses résultats avec les résultats du calcul à rebours de la thèse de Maazoun (2015).

### **Optimisation de la précision et du temps de calcul pour la phase de croisière**

Dans cette partie, le but est d'avoir des calculs précis et peu coûteux, car ceux-ci dépendent de la taille du problème de recherche de la trajectoire optimale, qui n'est autre que le problème de la recherche du plus court chemin dans le graphe acyclique cité plus haut. Une optimisation de la précision et du temps de calcul sera donc recherchée. Pour cela, nous allons proposer une méthodologie numérique adaptée au problème. La précision du calcul devra respecter une tolérance pré-établie et le temps de calcul devra être minimal. La fonction objective de ce problème d'optimisation n'est pas définie explicitement. Les variables de décision du problème sont l'erreur totale et le temps total du calcul. Ces deux variables sont évaluées sur une série de segments de la trajectoire. Pour chaque segment, nous déterminons l'erreur commise et le temps réservé pour le calcul. Les variables auxiliaires de ce problème sont le choix du schéma numérique pour discrétiser le système d'équations différentielles et la taille du pas d'intégration utilisé pour le calcul numérique. Dépendamment de la tolérance définie, la solution est déterminée de telle sorte que le temps de calcul soit minimal et que la précision soit acceptable.

### **La météo et le calcul des trajectoires en phase de croisière**

Toujours dans le contexte du calcul de la mise à jour de plans de vol, le troisième objectif de ce projet porte sur l'utilisation des données météo issues de fichiers de prévisions météorologiques dans le calcul des trajectoires. Plus précisément, nous allons utiliser différents fichiers météorologiques qui sont des fichiers binaires compressés en format GRIB (GRIdded Binary). Nous allons extraire les informations de la météo de ces fichiers et les associer aux différents nœuds du graphe où l'on cherche la trajectoire optimale. Ensuite, nous lançons les calculs avec ces

données et les comparons avec les calculs effectués avec les données du modèle ISA. La qualité des données météo issues des fichiers GRIB nous permettent de réduire les erreurs de calcul qui sont commises par l'utilisation des données du modèle ISA. L'objectif est d'analyser les résultats de calcul des trajectoires en fonction des choix de champs des données atmosphériques tels la température, les vents, la pression et l'humidité relative.

## CHAPITRE 2

### REVUE DE LITTÉRATURE

Parmi les recherches les plus récentes en optimisation des trajectoires de plans de vol, nous citons les travaux de Tang et Mukherjee (2000) qui déterminent la trajectoire de coût minimum en deux étapes. La première étape consiste à trouver une trajectoire parmi une liste de trajectoires fixes en deux dimensions. Cette trajectoire minimise les coûts en tenant compte de la météo. La deuxième étape consiste à déterminer les vitesses et les altitudes optimales pour la trajectoire choisie à la première étape. Des brevets de Schultz et al. (2003), abordent le problème en quatre dimensions où l'on utilise l'indice de coût (Cost Index, CI) pour tenir compte de la quatrième dimension qu'est le temps. Les brevets de Agam (2009) et de Endo et al. (2008), concernant la préparation des plans de vol, déterminent la trajectoire dans un espace à trois dimensions et utilisent le CI qu'ils considèrent comme une constante, mais ils n'abordent pas le sujet des conditions météorologiques sachant que ces conditions représentent la source principale des erreurs.

Également, des travaux de recherche ont été menés au centre expérimental d'Eurocontrol (Eurocontrol Experimental Center) pour calculer le coût des arêtes des trajectoires à déterminer. Des équations pour le calcul de consommation de carburant ont été développées dans Nuic (2010). Selon l'article de Nuic et al. (2005), l'utilisation de ces équations donne lieu à des erreurs. D'autres travaux traitent de l'estimation des erreurs qui sont engendrées par la météo. Green et al. (2000) traitent des travaux effectués par la NASA (National Aeronautics and Space Administration) où ils ont effectué des tests de vol pour étudier l'erreur de la prédiction de la vitesse du vent sur la trajectoire prédite. Cette étude compare deux systèmes de prédiction de la météo, soit les systèmes RUC-1 et RUC-2, pour des vols couvrant une période de treize mois. Ce sujet a aussi été abordé par l'IATA (International Air Transport Association) dans son document *IATA Economics* (2010). Nous citons l'article de Girardet (2014) qui résout le problème de la détermination de la trajectoire optimale lisse en deux dimensions, basée sur une modélisation des coûts simplifiée (trajectoire courte avec masse, vitesse et altitude constantes). Une thèse récente (Maazoun (2015)) aborde le problème des vols long-courriers en quatre dimensions en utilisant une modélisation des coûts plus réaliste (optimisation sur chaque arc en tenant compte de la masse décroissante de l'avion et des vents), mais en utilisant une discrétisation de l'espace (une grille) qui résulte en une trajectoire non lisse qui est voisine de la trajectoire optimale. La mise à jour des

plans de vol est une procédure particulière de l'optimisation des plans de vol. Elle porte sur le calcul des trajectoires dans le sens direct du vol. La plupart des recherches sur la mise à jour sont brevetées. Nous citons ici l'invention de Tang et Mukherjee (2000), où ils présentent le problème de la mise à jour comme un problème de création de plans de vol en route et qui nécessite la création d'un plan de vol lorsque l'avion se prépare pour le décollage, ou en cours de vol, en tout point d'un plan de vol déjà existant. Par exemple, lors d'un changement des conditions météorologiques, il peut être nécessaire de générer un nouveau plan de vol optimisé à partir de la position actuelle de l'avion. Selon l'article de Smith et al. (1995), différentes raisons peuvent nous mener à vouloir modifier un plan de vol en route ou au décollage. Comme exemple, l'évolution de la météo peut être différente des prédictions, le décollage peut être retardé à cause d'une congestion du trafic aérien, ou le temps d'arrivée planifié pourrait être changé pour des raisons de fermeture de pistes.

L'invention de Coulmeau (2013) porte sur une procédure d'optimisation en cours de vol de la consommation de carburant d'un avion. Plus précisément, l'invention vise à pallier le problème de l'excédant de carburant emporté en proposant au pilote une modification du profil de vol de façon à éviter un éventuel déficit en carburant. À chaque point de passage du vol («waypoint»), on peut déterminer le carburant nécessaire pour rejoindre la destination en fonction du profil de vol à venir, du vent moyen estimé et des paramètres extérieurs telle que la température. Une autre procédure proposée par Coulmeau et al. (2013a), permet aux systèmes de gestion de vols (FMS) d'optimiser des paramètres du plan de vol en cours de vol, dans le but de rester le plus près possible de l'indice de coût optimal, même si une ou plusieurs phases de vol sont modifiées en cours de mission. Les conditions météorologiques font partie des paramètres de vol. La mise à jour des informations météorologiques le long du vol fait partie de la mise à jour des plans de vol. Nous citons ici les travaux de Coulmeau et Deker (2012) qui proposent un procédé de mise à jour d'informations météorologiques pour un avion caractérisé par un calculateur de bord qui effectue automatiquement la requête des données météorologiques de façon à anticiper la mise à jour de celles-ci dès qu'une mise à jour est disponible.

Une autre contribution de Coulmeau et al. (2013b), sur les données météorologiques, propose un procédé d'estimation des données atmosphériques en tout point d'une trajectoire d'un avion. Le système de gestion de vol (FMS) remplit la fonction de prédiction du déroulement d'un plan de vol. L'objet de cette invention est de prendre en compte les données atmosphériques pour constituer les prédictions des temps de passage et de la consommation de l'avion le long de son plan de vol. Dans le but de réduire les erreurs liées aux incertitudes des prévisions météorologiques, des travaux concernant la modélisation météorologique ont été effectués. Nous citons l'invention de Lacombe et al. (2014) où l'on cite un procédé de modélisation météorologique pour le calcul du plan de vol.

Des calculs plus précis pour la mise à jour permettent de calculer des trajectoires de vol plus précises. Des algorithmes plus performants permettent de calculer plus de mises à jour de plans de vol. Dans la littérature, il y a peu de contributions sur cette partie du projet, c.-à-d. l'optimisation du temps de calcul en prenant en considération la contrainte sur l'erreur tolérée pour le calcul complet. Nous citons l'article de Bernat et al. (2007), où l'auteur tente de trouver où il serait possible de réduire le temps d'exécution d'un code. Le cas considéré porte sur 1,2% de lignes de code qui contribuent à 29% du temps d'exécution total. Les résultats de cet article montrent une réduction de 23% du temps d'exécution global pour le code analysé.

## CHAPITRE 3

### CALCUL DES TRAJECTOIRES POUR LA MISE À JOUR D'UN PLAN DE VOL EN CROISIÈRE

#### 3.1 Introduction

Nous allons proposer une méthode de calcul, appelée méthode de calcul direct (calcul effectué dans le sens du vol) pour la mise à jour des plans de vol. La mise à jour se fait dans ce sens puisque dans ce cas, nous connaissons la masse de l'avion, sa vitesse et son altitude et que le calcul consiste à mettre à jour ces quantités à partir de la masse de départ de l'avion. Nous présentons d'abord les modèles et les systèmes d'équations. Ensuite, nous procédons à une comparaison de la méthode de calcul direct à la méthode de calcul à rebours. Celle-ci se fait dans le sens inverse du vol, car pour ce calcul, nous n'avons pas la masse de l'avion au départ du vol. Le calcul est donc exécuté en utilisant comme masse de référence la masse de l'avion à l'aéroport d'arrivée (Maazoun (2015)).

Nous rappelons qu'un vol se base sur un plan de vol dans lequel une trajectoire depuis l'aéroport de départ jusqu'à l'aéroport d'arrivée est empruntée par l'avion. À la figure 1.1, nous illustrons un exemple de trajectoire qui est composée de différents arcs. Trois phases de vol sont aussi illustrées, à savoir la phase de montée initiale, la phase de croisière et la phase de descente finale. Comme mentionné précédemment, le plan de vol pourrait être modifié au cours du vol soit par les membres de l'équipage pour des raisons de changements de conditions météorologiques ou pour des variations imprévues de la performance et du mouvement de l'avion, ou imposé par le contrôle aérien pour une raison de gestion de trafic aérien.

Les coûts principaux associés à un vol d'avion et qui seront calculés à l'aide des méthodes de calcul direct et de calcul à rebours sont :

- le coût de carburant : coût total du carburant consommé en kilogrammes pour toute la trajectoire ;
- le coût du temps (salaires, retards, etc.) : calculé en fonction de l'indice de coût CI et du coût de carburant CF comme suit :  $CT = CI \times CF$  ;
- le coût de survol des territoires aériens.

La trajectoire optimale à déterminer représente la trajectoire qui minimise la somme de tous ces coûts. La méthode de calcul des coûts proposée ne porte que sur le calcul du coût du carburant. Les autres coûts n'ont pas été considérés pour deux raisons :



- Dans le but de faciliter la comparaison entre la méthode de calcul direct proposée et la méthode de calcul à rebours ;
- D'après le rapport *IATA Economics* (2010) : « depuis 2008, la portion du coût du carburant a augmenté et est devenue le coût le plus important pour les compagnies de transport aérien. Ce document se base sur un échantillon de 45 compagnies aériennes parmi les plus importantes. Dans cet échantillon, le coût du carburant représente environ 32,3% du coût total d'exploitation ».

Notons que le coût du carburant représente un pourcentage important des coûts d'une compagnie aérienne bien que le prix du pétrole puisse baisser ou croître.

### 3.2 Modèles pour le calcul du coût de carburant

La méthode de calcul des coûts de carburant associés à un vol d'avion est basée sur l'équation du modèle d'énergie totale et sur les équations des modèles aérodynamiques qui modélisent le mouvement, la performance et la variation de masse de l'avion en fonction de la vitesse, de l'altitude et d'autres paramètres. Ce sont les mêmes équations utilisées dans (Maazoun (2015)). Dans ce qui suit, nous présentons le cadre théorique de ces modèles.

#### 3.2.1 Modèle d'énergie totale

Le modèle dynamique utilisé provient de l'équation de l'énergie de Nuic (2010) (section 3.2, page 13). Cette équation établit l'équilibre entre les forces agissant sur l'appareil et le taux de variation des énergies potentielles et cinétiques comme suit :

$$(T - D)V = mg \frac{dh}{dt} + mV \frac{dV}{dt}, \quad (3.1)$$

où :

- $T$  est la poussée longitudinale (parallèle à la trajectoire) ;
- $D$  est la traînée aérodynamique ;
- $V$  est la vitesse propre de l'appareil (appelée ci-après : vitesse) ;
- $m$  est la masse de l'appareil ;
- $h$  est l'altitude ;
- $t$  est le temps ;
- $g$  est l'accélération gravitationnelle.

### Taux d'ascension

Selon le développement de Nuic (2010) (section 3.2), le membre de droite est exprimé en fonction du taux d'ascension,

$$(T - D)V = mg \frac{dh}{dt} + mV \left( \frac{dV}{dh} \right) \left( \frac{dh}{dt} \right). \quad (3.2)$$

On factorise ensuite ce taux d'ascension,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{(T - D)V}{mg} \left[ 1 + \left( \frac{V}{g} \right) \left( \frac{dV}{dh} \right) \right]^{-1}, \quad (3.3)$$

qui peut être exprimé en terme du facteur de partage d'énergie *ESF* (Energy Share Factor) :

$$\frac{dh}{dt} = \left[ \frac{(T - D)V}{mg} \right] ESF, \quad (3.4)$$

où

$$ESF = \left[ 1 + \left( \frac{V}{g} \right) \left( \frac{dV}{dh} \right) \right]^{-1} \quad (3.5)$$

La valeur de ce facteur est sans dimension et il représente la partie allouée à l'ascension plutôt qu'à l'accélération. Plus précisément, la valeur  $ESF = 1$  signifie que toute la puissance disponible est allouée à l'ascension alors que la valeur  $ESF = 0$  signifie que la puissance disponible est entièrement allouée à l'accélération. Le facteur *ESF* est exprimé en fonction de l'altitude afin d'obtenir un profil prédéterminé de la vitesse d'ascension.

### Accélération

L'accélération est également exprimée en fonction du *ESF* selon

$$\frac{dV}{dt} = \left[ \frac{(T - D)}{m} \right] (1 - ESF). \quad (3.6)$$

L'équation (3.6) est obtenue en exprimant l'équation du taux d'ascension (3.4) comme

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{dV}{dh} \frac{dh}{dt} = \frac{dV}{dh} \left[ \frac{(T - D)V}{mg} \right] ESF = \left[ \frac{(T - D)}{m} \right] \left[ \left( \frac{V}{g} \right) \left( \frac{dV}{dh} \right) + 1 - 1 \right] ESF \\ &= \left[ \frac{(T - D)}{m} \right] \left( \frac{1}{ESF} - 1 \right) ESF \\ &= \left[ \frac{(T - D)}{m} \right] (1 - ESF). \end{aligned}$$

### Taux de variation de la masse

Le taux de variation de la masse correspond au débit du carburant consommé. Le calcul du débit peut se faire en tenant compte de la poussée si celle-ci est fournie, sinon, le calcul se fait avec une poussée nulle.

#### - Cas d'une poussée fournie

Le calcul du débit est donné dans Nuic (2010) (section 3.9, page 25) comme une fonction des variables de poussée et de vitesse ainsi que des constantes caractéristiques de l'appareil  $C_{f1}$  et  $C_{f2}$ ,

$$\frac{dm}{dt} = -C_{fcr}C_{f1} \left( 1 + \frac{V}{C_{f2}} \right) T. \quad (3.7)$$

Le coefficient  $C_{fcr}$  caractérise le calcul du débit de cette phase.

#### - Cas d'absence de poussée

Les moteurs tournent à vide et le calcul du débit est donné dans Nuic (2010) (section 3.9.1, p.25) comme une fonction d'altitude et des constantes caractéristiques de l'appareil  $C_{f3}$  et  $C_{f4}$ ,

$$\frac{dm}{dt} = -C_{f3} \left( 1 - \frac{h}{C_{f4}} \right). \quad (3.8)$$

Ce calcul donne le débit minimum, même pour une très petite poussée.

### 3.2.2 Modèle aérodynamique

La traînée aérodynamique

$$D = \frac{\rho V^2 S}{2} \left( C_{D0} + C_{D2} CL^2 \right) \quad (3.9)$$

peut être exprimée comme

$$D = C_{D0} \frac{\rho V^2 S}{2} + C_{D2} \frac{2m^2 g^2}{\rho V^2 S} \quad (3.10)$$

(Nuic (2010), section 3.6, page 20) en utilisant la portance  $\frac{1}{2} \rho V^2 S CL = mg$ , où l'on a supposé que l'angle de roulis  $\phi$  est nul ( $\cos(\phi) \simeq 1$ ). La traînée aérodynamique dépend des éléments suivants :

- La vitesse  $V$  et la masse  $m$  ;
- Les conditions météo (la masse volumique de l'air  $\rho$ ) qui dépendent de la position ;
- Les caractéristiques de l'appareil  $C_{D0}$ ,  $C_{D2}$  et  $S$  (surface des ailes).

### Calcul de la poussée maximale

La poussée maximale est calculée selon un algorithme donné également dans Nuic (2010) (section 3.7). Elle est fonction de l'altitude et de la température ainsi que des constantes caractéristiques de l'appareil :  $T_{max} = T_{max}(h, T_e)$ , où  $T_e$  désigne la température et  $h$  est l'altitude. Dans le cas de la croisière, nous reformulons le calcul de la poussée maximale selon l'équation suivante :

$$T_{max} = C_{Tcr} C_{Tc,1} \left( 1 - \frac{h}{C_{Tc,2}} + C_{Tc,3} h^2 \right) (1 - C_{Tc,5} [\Delta T_{ISA} - C_{Tc,4}]), \quad (3.11)$$

où  $C_{Tc,1}, C_{Tc,2}, C_{Tc,3}, C_{Tc,4}, C_{Tc,5}$  désignent les coefficients de carburant, alors que  $C_{Tcr}$  est le coefficient de correction du flux de carburant en croisière.  $\Delta T_{ISA}$  représente la différence de la température par rapport à la température ISA au niveau moyen de la mer.

Il convient d'utiliser une poussée submaximale lorsque la poussée maximale entraîne une accélération ou un taux d'ascension dépassant la limite permise. Rappelons que l'accélération  $\frac{dV}{dt}$  et le taux d'ascension  $\frac{dh}{dt}$  sont reliés par le facteur  $ESF$ . Il suffit donc qu'une de ces deux quantités atteigne son maximum pour que les deux soient fixées. La poussée est alors calculée pour obtenir l'ascension et l'accélération requises selon l'équation d'énergie (3.1), où l'on a isolé le terme de la poussée,

$$T = D + \frac{mg}{V} \frac{dh}{dt} + m \frac{dV}{dt}. \quad (3.12)$$

Remarquons que dans le cas d'une poussée submaximale, il est inutile de faire appel aux équations (3.4) ou (3.5) puisque les deux quantités  $\frac{dV}{dt}$  et  $\frac{dh}{dt}$  sont fixées.

En utilisant les équations (3.10) et (3.12), nous reformulons la poussée  $T$  comme

$$T = C_{D0} \frac{\rho V^2 S}{2} + C_{D2} \frac{2m^2 g^2}{\rho V^2 S} + \frac{mg}{V} \frac{dh}{dt} + m \frac{dV}{dt}. \quad (3.13)$$

### Calcul de la masse volumique de l'air

Pour déterminer la poussée  $T$ , on a besoin de calculer la masse volumique de l'air en fonction de l'altitude  $h$ . On utilise les équations qui sont résumées dans Nuic (2010). Ces équations sont basées sur l'atmosphère standard selon l'OACI (Organisation de l'aviation civile internationale). Cette atmosphère standard est aussi notée ISA (International Standard Atmosphere). Elle définit des conditions normales de température et de pression qui ne dépendent que de l'altitude. La masse volumique de l'air  $\rho$  est donnée selon la loi des gaz parfaits

$$\rho = \frac{P}{R T_e}, \quad (3.14)$$

où  $R = 287,05287$  (en  $\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ ) est la constante spécifique de l'air sec,  $Te$  est la température en Kelvin et  $p$  est la pression atmosphérique en Pascal à l'altitude  $h$ . Les calculs de  $Te$  et de  $p$  dépendent de la position de l'avion par rapport à la tropopause. L'altitude de la tropopause est donnée par

$$h_{\text{tropopause}} = 11000 - \frac{\Delta T_{\text{ISA}}}{k_T}, \quad (3.15)$$

où  $k_T = -0,0065$  ( $\text{K m}^{-1}$ ) est le gradient de température ISA sous la tropopause et  $\Delta T_{\text{ISA}}$  désigne la différence de température par rapport à la température ISA au niveau moyen de la mer,

$$\Delta T_{\text{ISA}} = T_0 - (T_0)_{\text{ISA}}, \quad (3.16)$$

où  $T_0$  est la température ambiante et  $(T_0)_{\text{ISA}} = 288,15$  K est la température ISA au niveau moyen de la mer.

### 3.2.3 Système d'équations à discrétiser

Le système d'équations différentielles à discrétiser est formé de l'équation du taux d'ascension (3.4), de l'équation d'accélération (3.6) et de l'équation du débit (3.7) ou (3.8) selon le cas où la poussée est fournie ou non. Ces équations sont reformulées comme suit :

$$\frac{dh}{dt} = \left[ \frac{(T - D)V}{mg} \right] ESF =: f_h(V, m, h); \quad (3.17)$$

$$\frac{dV}{dt} = \left[ \frac{(T - D)}{m} \right] (1 - ESF) =: f_V(V, m, h); \quad (3.18)$$

$$\frac{dm}{dt} = -C_{fcr} \eta T =: f_m(V, m, h); \quad (3.19)$$

ou

$$\frac{dm}{dt} = -C_{f3} \left( 1 - \frac{h}{C_{f4}} \right) =: f_m(V, m, h); \quad (3.20)$$

$$\text{avec} \quad \eta = C_{f1} \left( 1 + \frac{V}{C_{f2}} \right). \quad (3.21)$$

Les conditions initiales sont données par la valeur des trois quantités discrètes, soit l'altitude, la vitesse et la masse à un temps initial  $t_0$ . Nous utiliserons la notation vectorielle

$$y(t) = (V(t), m(t), h(t))^T \quad \text{et} \quad f = (f_V, f_m, f_h)^T. \quad (3.22)$$

Le système d'équations différentielles s'écrit alors

$$y' = f(t, y(t)), \quad (3.23)$$

et les conditions initiales prennent la forme

$$y(t_0) = (V_0, m_0, h_0)^T. \quad (3.24)$$

### 3.2.4 Discrétisation du système d'équations différentielles

La discrétisation du système d'équations différentielles (3.23) dans un état connu des variables dépendantes (3.24), se fait dans l'ordre suivant :

**Calcul de la traînée aérodynamique initiale  $D_0$  :** c'est une application directe de l'équation (3.10) avec les conditions initiales (3.24).

**Calcul de la poussée initiale  $T_0$  :** la poussée maximale est calculée selon un algorithme donné dans Nuic (2010). On calcule d'abord la poussée maximale puis on se sert de l'équation (3.12) pour déterminer si la poussée maximale entraîne une accélération ou un taux d'ascension dépassant la limite permise. Le cas échéant, la poussée submaximale est donnée par l'équation (3.12).

**Évaluation des membres de droite du système :** les membres de droite des équations (3.17), (3.18) et (3.19) ou (3.20) sont évalués aux valeurs initiales  $V_0, m_0, h_0, D_0$  et  $T_0$ . Dans le cas d'une poussée submaximale, seule l'évaluation du membre de droite de la dernière équation est nécessaire.

### 3.3 Discrétisation des équations différentielles

La discrétisation des équations différentielles que nous proposons concerne les segments à vitesse et altitude constantes, les segments d'accélération et les segments de changement d'altitude. Les variables de cette discrétisation diffèrent de celles utilisées dans Maazoun (2015). Par la suite, nous donnons pour chaque type de segment les équations à résoudre et les variables de discrétisation.

### 3.3.1 Segment à vitesse et à altitude constantes

Ce type de segment est parcouru à vitesse et altitude constantes et la distance  $\delta x$  à parcourir est connue d'avance. Dans ce cas,  $\frac{dh}{dt} = 0$ ,  $\frac{dV}{dt} = 0$  et le système d'équations se réduit alors à

$$\frac{dm}{dt} = -C_{fcr} \eta T \quad (3.25)$$

$$\text{ou} \quad \frac{dm}{dt} = -C_{f3} \left(1 - \frac{h}{C_{f4}}\right) \quad (3.26)$$

$$\text{avec} \quad \eta = C_{f1} \left(1 + \frac{V}{C_{f2}}\right). \quad (3.27)$$

La distance  $\delta x$  à parcourir peut être divisée en pas d'intégration égaux de longueur  $\Delta x$ . Le nombre de pas est donc  $\frac{\delta x}{\Delta x}$  et chaque pas est parcouru en un temps  $\Delta t = \frac{\Delta x}{V}$ .

### 3.3.2 Segment d'accélération

Ce type de segment est parcouru à une altitude constante et avec un changement de vitesse  $\delta v$  connu d'avance. Dans ce cas,  $\frac{dh}{dt} = 0$  et le facteur  $ESF$  vaut 0. Le système d'équations se réduit alors aux deux équations

$$\frac{dV}{dt} = \left[ \frac{(T - D)}{m} \right] \quad (3.28)$$

$$\text{et} \quad \frac{dm}{dt} = -C_{fcr} \eta T \quad (3.29)$$

$$\text{avec} \quad \eta = C_{f1} \left(1 + \frac{V}{C_{f2}}\right). \quad (3.30)$$

L'accélération peut être divisée en pas d'intégration égaux  $\Delta v$ . Le nombre de pas est donc  $\frac{\delta v}{\Delta v}$  et chaque pas est parcouru en un temps  $\Delta t = \frac{\Delta v}{\frac{dV}{dt}}$ . Notons qu'un segment de décélération admet la même simplification où l'on emploie plutôt l'équation du débit minimum (3.8).

### 3.3.3 Segment d'ascension

Pour ce type de segment, seule l'ascension requise  $\delta h$  est connue d'avance. L'ascension  $\frac{dh}{dt}$  et l'accélération  $\frac{dV}{dt}$  ne sont pas nulles et les trois équations du système sont alors utilisées. L'ascension peut être divisée en pas de calcul égaux  $\Delta h$ . Le nombre de pas est donc  $\frac{\delta h}{\Delta h}$  et chaque pas est parcouru en un temps  $\Delta t = \frac{\Delta h}{\frac{dh}{dt}}$ . Ce type de segment admet une simplification du système d'équations sur la partie du vol qui s'accomplit au-dessus de la tropopause. À cette altitude, le profil de vitesse imposé à un nombre de Mach constant correspond à une vitesse propre constante. L'accélération est alors

nulle,  $\frac{dV}{dt} = 0$ , ce qui implique que  $ESF = 1$  et le système se réduit aux deux équations

$$\frac{dh}{dt} = \left[ \frac{(T - D)V}{mg} \right] \quad (3.31)$$

$$\text{et} \quad \frac{dm}{dt} = -C_{fcr} \eta T \quad (3.32)$$

$$\text{avec} \quad \eta = C_{f1} \left( 1 + \frac{V}{C_{f2}} \right). \quad (3.33)$$

Notons qu'un segment de descente utilise plutôt l'équation du débit minimum (3.8). Un segment en descente admet également la simplification mentionnée ci-dessus lorsque ce segment est parcouru au-dessus de la tropopause. Notons finalement que sur un segment en ascension, la vitesse de vol  $V$  est différente de la vitesse horizontale. Ceci est vrai même en l'absence de vent. La vitesse de vol comporte une composante verticale en plus de la composante horizontale. Pour obtenir la distance horizontale parcourue par rapport au sol, nous devons soustraire la composante verticale :

$$\begin{aligned} dist_{vol} &= \Delta t V; \\ dist_{sol} &= \sqrt{(dist_{vol})^2 - (\Delta h)^2}. \end{aligned}$$

### 3.3.4 Nouvelles variables d'intégration du système d'équations différentielles

Dans cette section, nous présentons la méthode de discrétisation des équations différentielles (3.17), (3.18) et (3.19) pour chacun des trois types de segments. Pour chaque cas, on choisit une autre variable que le temps  $t$  pour jouer le rôle de variable indépendante. Sur un segment à vitesse et à altitude constantes, la distance de parcours  $\delta x$  est connue d'avance et nous choisissons la variable de distance  $x$  comme variable indépendante. Sur un segment d'ascension, le changement d'altitude  $\delta h$  est aussi connu et la variable d'altitude  $h$  est choisie comme variable indépendante. Finalement, pour un segment d'accélération, la variable de vitesse  $V$  varie sur un intervalle de longueur  $\delta V$  entre  $V_{initiale}$  et  $V_{finale}$ . On choisit donc la vitesse comme variable indépendante sur ce type de segment. Pour illustrer comment se fait ce changement de variable indépendante, nous prenons comme exemple le segment d'ascension qui fait intervenir toutes les équations du système.

Nous avons vu à la section 3.3.3 que l'ascension requise,  $\Delta h$ , est connue d'avance et que le pas de temps correspondant est donné par l'expression  $\Delta t = \frac{\Delta h}{\frac{dh}{dt}}$ . Or le dénominateur de cette expression,  $\frac{dh}{dt}$ , est une des dérivées du système d'équations différentielles et elle doit être évaluée. Il s'ensuit que le pas de temps  $\Delta t$  vient du schéma numérique alors que l'ascension requise  $\Delta h$  est ici la quantité fixe qui joue le rôle de la longueur du pas d'intégration. En fait, en remplaçant la valeur de  $\Delta t$  dans les expressions de  $\Delta V$  et  $\Delta m$ , on retrouve toutes les valeurs exprimées en fonction de  $\Delta h$  :



$$\begin{aligned}
\Delta t &= \Delta h \left( \frac{dh}{dt} \right)^{-1}; \\
\Delta V &= \Delta t \left( \frac{dV}{dt} \right) = \Delta h \left( \frac{dV}{dt} \right) \left( \frac{dh}{dt} \right)^{-1}; \\
\Delta m &= \Delta t \left( \frac{dm}{dt} \right) = \Delta h \left( \frac{dm}{dt} \right) \left( \frac{dh}{dt} \right)^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

L'évaluation des dérivées  $\frac{dm}{dt}$ ,  $\frac{dV}{dt}$  et  $\frac{dh}{dt}$  n'a pas changé. Ce qui a changé c'est le calcul des intervalles où sont définies chacune de ces variables. Avant le changement de la variable indépendante, le calcul des intervalles est donné par la deuxième équation du système (3.34). Après le changement de la variable indépendante, ce calcul est donné par le membre de droite du système (3.34).

Le système d'équations (3.17), (3.18) et (3.19) formulé comme :

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{dt} &= 1; \\
\frac{dV}{dt} &= f_V(t, m(t), V(t), h(t)); \\
\frac{dm}{dt} &= f_m(t, V(t), h(t)); \\
\frac{dh}{dt} &= f_h(t, m(t), V(t), h(t)),
\end{aligned} \tag{3.35}$$

devient alors :

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{dh} &= \left( \frac{dh}{dt} \right)^{-1}; \\
\frac{dV}{dh} &= g_V(t(h), m(h), V(h), h); \\
\frac{dm}{dh} &= g_m(t(h), V(h), h); \\
\frac{dh}{dh} &= 1.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Les deux systèmes sont reliés par le taux d'ascension  $\frac{dh}{dt}$  selon :

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dh} &= \frac{dV}{dt} \times \frac{dt}{dh} = \frac{dV}{dt} \times \left( \frac{dh}{dt} \right)^{-1}; \\
\frac{dm}{dh} &= \frac{dm}{dt} \times \frac{dt}{dh} = \frac{dm}{dt} \times \left( \frac{dh}{dt} \right)^{-1}.
\end{aligned}$$

En notation vectorielle, nous pouvons écrire le premier système (3.35) sous la forme

$$y' = f(t, y(t)), \quad (3.37)$$

où

$$y(t) = (V(t), m(t), h(t))^T \quad \text{et} \quad f = (f_V, f_m, f_h)^T.$$

### 3.4 Calcul du coût de la trajectoire optimale

Nous présentons dans cette section l'algorithme de recherche de la trajectoire optimale. En premier lieu, nous construisons une grille appelée grille NISB (grille de nœuds isobarométriques ou grille de nœuds par niveau de pression). Ces nœuds sont caractérisés par leur latitude, leur longitude et leur niveau de pression. Les données météo sont données sur ce type de grille. La grille sur laquelle le calcul des coûts de la trajectoire optimale sera effectué est appelée la grille de calcul. Les nœuds de cette grille sont caractérisés par leur latitude, leur longitude et leur altitude. Les nœuds de la grille NISB et de ceux de la grille de calcul ne sont pas les mêmes. Pour déterminer les données météo aux nœuds de la grille de calcul, nous effectuons une interpolation des données météo entre les nœuds de la grille NISB. Le calcul du coût de la trajectoire optimale se fait à l'aide de l'algorithme du plus court chemin (PCC) qu'on applique sur un graphe acyclique. Les nœuds de la grille de calcul et les arcs les joignant représentent respectivement les nœuds et les arcs de ce graphe. L'algorithme utilisé pour la recherche du plus court chemin est l'algorithme de Dijkstra (1959).

#### 3.4.1 Grille de nœuds isobarométriques (grille NISB)

Puisque les données météo sont données pour différents niveaux de pression, nous allons chercher ces données météo sur la grille NISB. À la figure 3.1, on illustre ces niveaux de pression.

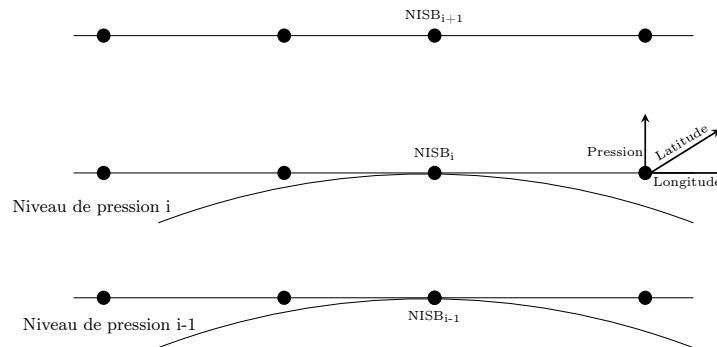


Figure 3.1 Partie de la grille de nœuds isobarométriques (grille NISB).

Il y a deux façons pour récupérer les données météo sur une grille NISB. La première concerne l'utilisation des données météo selon le standard ISA (International Standard Atmosphere). La deuxième consiste à extraire les données depuis des fichiers en format GRIB (GRIdded Binary). Au chapitre 5, nous proposerons une étude détaillée sur l'utilisation des deux méthodes. Dans ce chapitre, nous allons présenter les résultats de calcul en utilisant la méthode qui utilise les données calculées avec l'atmosphère standard ISA.

### 3.4.2 Interpolation linéaire des données de la grille NISB vers la grille par niveaux d'altitude (grille de calcul)

À la figure 3.2, nous illustrons avec des cercles vides les nœuds  $NCAL_i$  de la grille de calcul et avec des cercles pleins les nœuds  $NISB_i$  de la grille NISB (niveaux de pression). Le niveau d'altitude du nœud de calcul  $NCAL_i$  est entre les niveaux d'altitude du nœud  $NISB_i$  et du nœud  $NISB_{i-1}$ . Nous interpolons donc les quantités aux nœuds  $NISB_i$  et  $NISB_{i-1}$  pour déterminer les informations météo (température, pression, humidité relative,  $V_x$ ,  $V_y$ ) au nœud de calcul  $NCAL_i$ , où  $V_x$  et  $V_y$  désignent respectivement la composante horizontale et la composante verticale des vents.

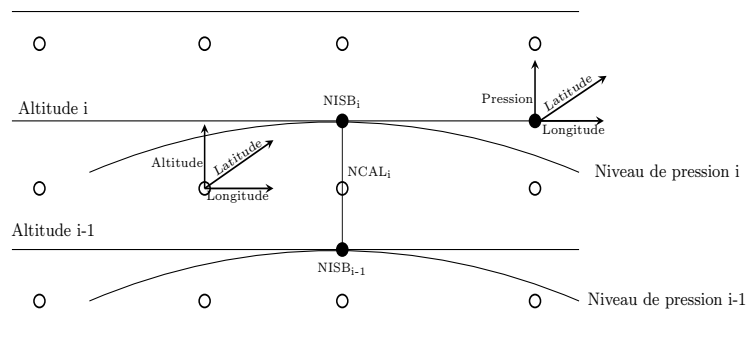


Figure 3.2 Partie de la grille de calcul.

### 3.4.3 Calcul du coût des arcs de la trajectoire optimale

À la figure 3.3, nous illustrons un arc qui lie deux nœuds de calcul  $NCAL_i$  et  $NCAL_{i+1}$ . Il est décomposé en trois étapes, à savoir l'étape d'accélération, l'étape de changement d'altitude (montée) et l'étape à vitesse et à altitude constantes. Le calcul du coût de cet arc requiert certains paramètres comme la vitesse, la masse, l'altitude et les données atmosphériques comme la température, la pression, l'humidité relative et les composantes de vents aux extrémités de cet arc.

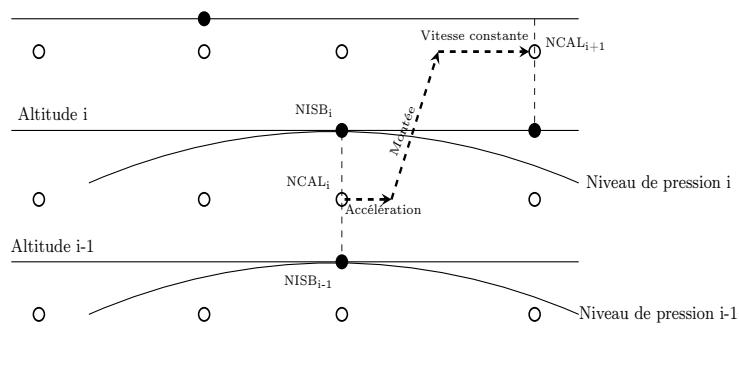


Figure 3.3 Arc de montée sur la grille de calcul.

La grille de calcul est construite en associant à chacun de ces nœuds les paramètres cités plus haut. Le coût des arcs est calculé et nous pouvons alors utiliser l'algorithme du plus court chemin de Dijkstra (1959) pour chercher la trajectoire optimale.

### 3.4.4 Programme de calcul de la trajectoire optimale

Nous illustrons à la figure 3.4 l'organigramme associé au programme de calcul des trajectoires optimales.

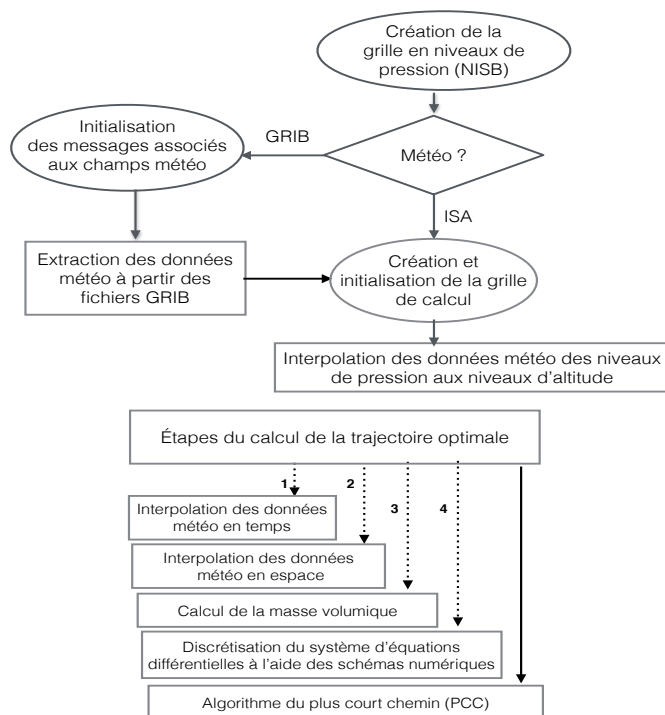


Figure 3.4 Organigramme du programme de calcul des trajectoires optimales.

Nous construisons d'abord la grille NISB, puis on associe à ses nœuds les données atmosphériques issues des fichiers météo ou ISA. Nous construisons ensuite la grille de calcul en associant à ses nœuds les données qu'on interpole entre les nœuds de la grille NISB. Nous calculons donc la trajectoire optimale en cherchant le chemin le plus court dans le graphe associé à cette grille de calcul. Le calcul est basé sur des interpolations en temps et en espace des données atmosphériques, et sur la discrétisation d'un système d'équations différentielles.

### **3.5 Comparaison de la méthode de calcul direct (vers l'avant) avec la méthode de calcul à rebours (vers l'arrière)**

Dans cette section, nous allons comparer les résultats du calcul direct avec les résultats du calcul à rebours sur la phase de croisière.

#### **3.5.1 Comparaison sur la phase de croisière**

Le calcul à rebours a déjà été vérifié et présenté dans le document « Rapport de comparaison des résultats des algorithmes » (Pestieu (2012)) et il a aussi été présenté dans le cadre de la thèse de Maazoun (2015). Comme mentionné à la section 3.1, le calcul direct, qui s'effectue dans le sens du vol, représente la base du calcul de la mise à jour d'un plan de vol. Pour vérifier le calcul direct, nous allons comparer les résultats du calcul direct avec les résultats du calcul à rebours en phase de croisière. Pour ce faire, nous allons présenter les calculs effectués sur différentes parties de la phase de croisière. Puis, nous allons procéder à la comparaison des résultats des deux méthodes de calcul. Différents types d'arcs ont été choisis pour la comparaison. Ensuite, nous allons expliquer en détail les différences de consommation observées. Enfin, nous allons conclure quant à la vérification des résultats de calcul direct en nous appuyant sur notre hypothèse concernant les différences de consommation. Le calcul direct et le calcul à rebours sont effectués sur une partie de la croisière. Celle-ci est composée de deux paliers et d'un changement d'altitude (montée). Les paramètres de calcul utilisés sont ceux spécifiés dans le document de Pestieu (2012). Le même appareil a été choisi, un Boeing B777-200 avec les constantes BADA Team (2000) correspondantes qu'on peut trouver dans le fichier B-763\_\_.OPF.

À la figure 3.5, nous illustrons une partie de la phase de croisière qui est composée de deux paliers et d'une montée. Le palier inférieur est à 33 000 pi et le palier supérieur est à 35 000 pi. Les deux paliers sont composées d'une suite d'arcs à altitude constante.

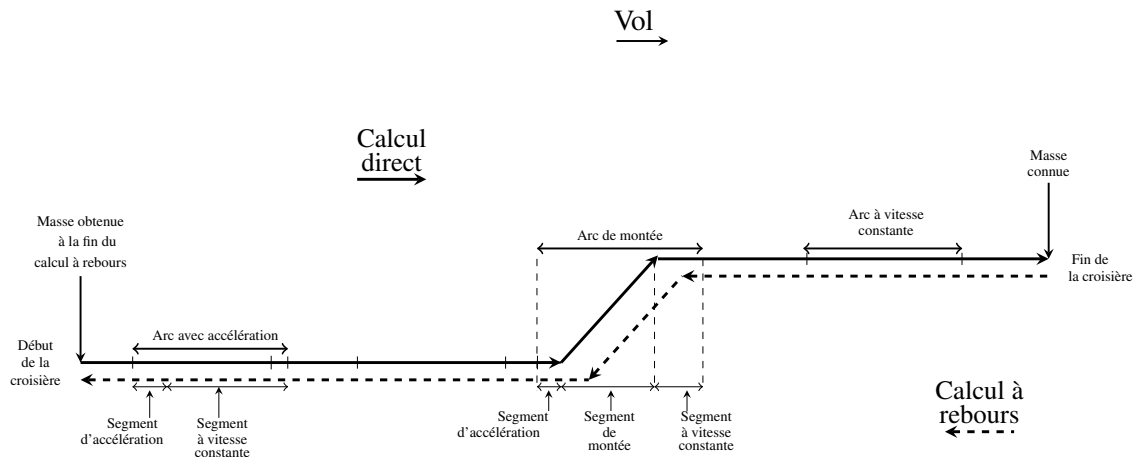


Figure 3.5 Calculs direct et à rebours sur une partie de la phase de croisière.

On distingue deux types d'arcs, un arc avec un segment d'accélération suivi d'un segment à vitesse constante et un arc ayant seulement un segment à vitesse constante. L'arc associé à la montée est composé d'un segment d'accélération, d'un segment de montée et d'un segment à vitesse constante (cf. figure 3.5). Nous illustrons aussi le sens des calculs effectués sur cette phase de croisière. La masse initiale du calcul à rebours est égale à  $m = 208\,700$  kg. La masse finale du calcul à rebours est utilisée comme masse initiale du calcul direct. Pour ces calculs, nous n'avons pas pris en compte la vitesse du vent. Pour effectuer ces calculs, nous allons suivre les procédures de discrétisation de la section 3.3 qui permettent de discrétiser le système d'équations différentielles de la sous-section 3.2.3 :

$$\frac{dh}{dt} = \left[ \frac{(T - D)V}{mg} \right] ESF; \quad (3.38)$$

$$\frac{dV}{dt} = \left[ \frac{(T - D)}{m} \right] (1 - ESF); \quad (3.39)$$

$$\frac{dm}{dt} = -C_{fcr} \eta T, \quad (3.40)$$

$$\text{ou} \quad \frac{dm}{dt} = -C_{f3} \left( 1 - \frac{h}{C_{f4}} \right), \quad (3.41)$$

$$\text{avec} \quad \eta = C_{f1} \left( 1 + \frac{V}{C_{f2}} \right), \quad (3.42)$$

où les paramètres  $T$ ,  $D$ ,  $m$ ,  $h$ ,  $t$ ,  $g$  et  $V$  ont déjà été définis à la sous-section 3.2.1, alors que  $C_{fcr}$ ,  $C_{f1}$ ,  $C_{f2}$ ,  $C_{f3}$  et  $C_{f4}$  sont les coefficients caractéristiques de l'appareil.

Le calcul du coût en phase de croisière se fait aussi sur une série d'arcs. Le coût de chaque arc est évalué sur trois types de segments : le segment d'accélération, le segment de changement d'altitude (montée) et le segment à vitesse et à altitude constantes. Le calcul sur le segment d'accélération se fait avec des tranches de vitesses  $\Delta V$  comme pas d'intégration, le calcul sur le segment de montée se fait avec des tranches d'altitudes  $\Delta h$  comme pas d'intégration alors que le calcul sur le segment à vitesse et à altitude constantes se fait avec des pas de distances comme pas d'intégration.

### 3.5.2 Résultats du calcul direct et du calcul à rebours de la consommation

Nous présentons les comparaisons en choisissant deux types d'arcs. Nous effectuons d'abord les comparaisons pour les arcs à altitude et vitesse constantes. Ensuite, nous les effectuons pour les arcs de changement d'altitude et de vitesse.

#### Scénario d'un arc à altitude et à vitesse constantes

Commençons par le cas simple d'un arc à altitude et à vitesse constantes. Dans ce cas, les équations (3.38) et (3.39) se réduisent à :

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = \frac{dh}{dt} = 0; \\ T = D. \end{cases}$$

L'équation différentielle (3.40) de la variation de la masse prend la forme

$$\frac{dm}{dt} = -C_{fcr}C_{f_1} \left(1 + \frac{V}{C_{f_2}}\right) \left[ C_{D_0} \frac{\rho V^2 S}{2} + C_{D_2} \frac{2m^2 g^2}{\rho V^2 S} \right]. \quad (3.43)$$

Si la masse volumique  $\rho$  est constante, nous pouvons définir les constantes suivantes :

$$\begin{cases} A = C_{fcr}C_{f_1} \left(1 + \frac{V}{C_{f_2}}\right); \\ B = C_{D_0} \frac{\rho V^2 S}{2}; \\ C = C_{D_2} \frac{2g^2}{\rho V^2 S}. \end{cases}$$

L'équation (3.43) prend alors la forme

$$-m'(t) = AB + ACm^2(t). \quad (3.44)$$

La solution analytique de l'équation différentielle (3.44) est

$$m(t) = \sqrt{\frac{B}{C}} \tan \left[ -A\sqrt{BC}t + E \right], \quad (3.45)$$

où  $E$  est la constante d'intégration qui est déterminée à l'aide de la condition initiale  $m(0)$ . Pour le calcul à rebours et le calcul direct, nous avons utilisé des pas d'intégration de longueur égale à 8 000 m et la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 comme schéma numérique. Les résultats sont obtenus en choisissant une vitesse constante  $V = 255$  m/s et la masse initiale du calcul à rebours est  $m = 208\,700$  kg. La masse initiale du calcul direct est la masse finale calculée avec le calcul à rebours. Pour calculer les consommations, nous déterminons les masses finales pour les deux calculs en faisant le calcul pour cinq altitudes différentes : 33 000, 35 000, 37 000 et 39 000 pieds. Nous calculons les masses de carburant  $m_{\text{Direct}}$  et  $m_{\text{Rebours}}$  consommées et les temps de parcours  $t_{\text{Direct}}$  et  $t_{\text{Rebours}}$  en utilisant la solution analytique (3.45). Les résultats de ces calculs sont donnés au tableau 3.1.

Tableau 3.1 Comparaison des consommations (altitude et vitesse constantes).

altitude (pi)	$m_{\text{Direct}}$ (kg)	$m_{\text{Rebours}}$ (kg)	$t_{\text{Direct}}$ (s)	$t_{\text{Rebours}}$ (s)
33 000	491,205 077 85	491,205 077 86	250,90	250,90
35 000	472,272 036 87	472,272 036 88	250,90	250,90
37 000	454,257 079 24	454,257 079 25	250,90	250,90
39 000	438,083 590 02	438,083 590 03	250,90	250,90

Nous constatons que le calcul direct et le calcul à rebours donnent des consommations et des temps de parcours qui sont égaux à une précision numérique de  $10^{-7}$ .

### Scénario d'un arc avec changement d'altitude et de vitesse

Étudions maintenant le cas général où la vitesse et l'altitude ne sont plus constantes. Le vol sur ce type d'arc peut comporter trois étapes :

- un changement de vitesse ;
- un changement d'altitude ;
- un segment à altitude et à vitesse constantes.

Nous voulons effectuer des comparaisons en utilisant un ensemble représentatif de scénarios possibles. En phase de croisière, les changements d'altitude se font avec un nombre de Mach constant. Comme le nombre de Mach est le rapport de la vitesse de l'avion sur la vitesse du son, nous portons alors une attention particulière à la tropopause puisque le calcul de la vitesse du son change de forme à cette altitude. Les vérifications portent sur plusieurs arcs afin de couvrir toutes les possibilités.



Pour vérifier tous les scénarios de changement d'altitude, nous avons choisi des arcs selon les six scénarios suivants :

1.  $h_2 < h_1 < h_{\text{tropopause}}$ ;
2.  $h_1 < h_2 < h_{\text{tropopause}}$ ;
3.  $h_2 < h_{\text{tropopause}} < h_1$ ;
4.  $h_1 < h_{\text{tropopause}} < h_2$ ;
5.  $h_{\text{tropopause}} < h_2 < h_1$ ;
6.  $h_{\text{tropopause}} < h_1 < h_2$ ,

où  $h_1$  et  $h_2$  dénotent respectivement l'altitude de départ et l'altitude d'arrivée de l'arc considéré et prennent des valeurs parmi 33 000 pi, 35 000 pi, 37 000 pi et 39 000 pi. Les scénarios sont illustrés à la figure 3.6. L'altitude de la tropopause  $h_{\text{tropopause}}$  est approximativement égale à 11 000 m.

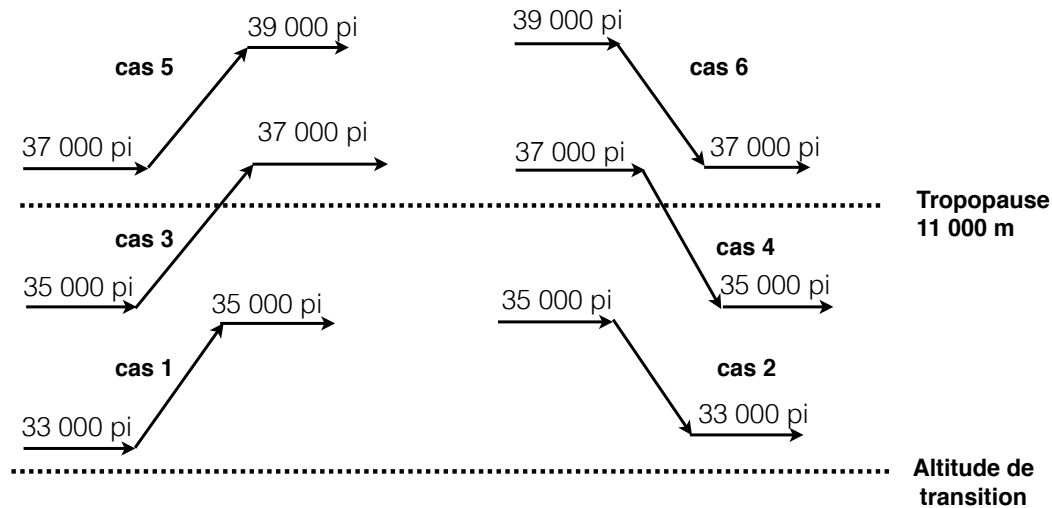


Figure 3.6 Scénarios de changements d'altitude.

Les cas de la montée et de la descente sont étudiés pour des changements de paliers qui s'effectuent en dessous, à travers ou au-dessus de la tropopause. Nous considérons les altitudes au-dessus de l'altitude de transition, ce qui est habituellement le cas en croisière. Nous avons choisi une vitesse de départ  $V_1 = 250$  m/s et une vitesse d'arrivée  $V_2 = 255$  m/s.

Au tableau 3.2, on donne les résultats de calcul de la masse de carburant consommé. Nous constatons que les différences de consommation entre le calcul direct et le calcul à rebours sont plus importantes lorsqu'on vole à basse altitude. À la section 3.6, nous donnons des explications détaillées pour les cas 1 et 2.

Tableau 3.2 Comparaison des consommations (changement d'altitude et de vitesse).

cas	$h_1$ (pi)	$h_2$ (pi)	$m_{\text{Direct}}$ (kg)	$m_{\text{Rebours}}$ (kg)	écart (kg)	écart   (%)
1	33 000	35 000	563,74	569,91	-6,17	1,1
2	35 000	33 000	433,20	418,09	15,11	3,6
3	35 000	37 000	546,49	551,42	-4,90	0,9
4	37 000	35 000	413,75	401,56	12,19	3
5	37 000	39 000	530,70	533,33	-2,63	0,4
6	39 000	37 000	395,05	387,08	7,97	2

### 3.6 Explication détaillée des différences de consommation

Pour expliquer les différences de consommation entre le calcul direct et le calcul à rebours, nous avons choisi, parmi les cas du tableau 3.2, le cas 1 qui correspond à l'arc de montée d'une altitude de 33 000 pi à une altitude de 35 000 pi et le cas 2 lié à l'arc de descente d'une altitude de 35 000 pi à une altitude de 33 000 pi, vu que les résultats du calcul à rebours pour ces deux cas ont été déjà présentés dans Maazoun (2015).

#### 3.6.1 Le calcul direct et le calcul à rebours

Pour ce calcul, nous considérons un arc qui contient trois étapes distinctes : une étape d'accélération, une étape de montée ou de descente et une étape à vitesse et à altitude constantes. L'ordre des étapes du calcul direct et du calcul à rebours pour l'arc de montée est illustré à la figure 3.7. Le calcul direct commence par l'étape d'accélération qui est représentée par le segment  $(I_D, A_D)$ , vient ensuite l'étape de montée au segment  $(A_D, B_D)$  et finit par l'étape à vitesse constante au segment  $(B_D, F_D)$ . Le calcul à rebours commence par l'étape d'accélération représentée par le segment  $(I_R, A_R)$ , puis par l'étape de montée au segment  $(A_R, B_R)$  et finit par l'étape à vitesse constante au segment  $(B_R, F_R)$ . Nous avons choisi cet ordre car nous déterminons à l'avance la vitesse aux nœuds  $I_D$  et  $A_D$  de l'étape d'accélération du calcul direct et aux nœuds  $I_R$  et  $A_R$  pour le calcul à rebours. Nous connaissons aussi la différence d'altitude entre les nœuds  $A_D$  et  $B_D$  pour le calcul direct et entre les nœuds  $A_R$  et  $B_R$  pour le calcul à rebours. D'après les équations différentielles (3.17), (3.18), (3.19) et (3.20), nous effectuons le calcul pour l'étape d'accélération en considérant la différence de vitesses  $\Delta V$  comme pas d'intégration sur cette étape. La distance parcourue sur cette étape n'est connue qu'après ce calcul. Aussi, on fait le calcul de l'étape de montée entre les nœuds  $A_D$  et  $B_D$  pour le calcul direct et entre  $A_R$  et  $B_R$  pour le calcul à rebours en choisissant la différence d'altitudes  $\Delta h$  comme pas d'intégration sur cette étape. La longueur de cette étape n'est connue qu'à la fin du calcul. Après les calculs de ces deux

premières étapes, on peut calculer la longueur de la dernière étape (étape à vitesse constante). C'est la distance de l'arc entier moins les distances calculées dans les deux premières étapes. Nous avons besoin de cette distance pour faire le calcul de la dernière étape à vitesse constante, car ce calcul utilise la distance  $\Delta x$  comme pas d'intégration. Pour cette raison, le calcul de l'étape à vitesse constante est toujours la dernière étape de calcul, tant pour le calcul direct que pour le calcul à rebours.

Tel qu'illustrée à la figure 3.7, l'étape d'accélération du calcul direct se fait à une altitude de 33 000 pi alors que l'étape du calcul à rebours se fait à une altitude de 35 000 pi. Pour l'étape à vitesse constante, c'est le contraire, i.e. que cette étape est à une altitude de 35 000 pi pour le calcul direct et à une altitude de 33 000 pi pour le calcul à rebours.

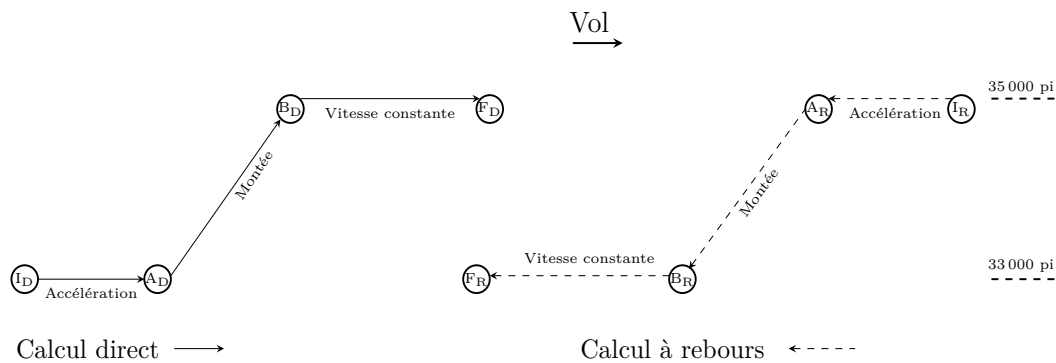


Figure 3.7 Scénarios d'un arc de montée de 33 000 pi à 35 000 pi.

À la fin de la sous-section 3.6.2, nous allons expliquer les différences de consommation dans le cas d'une descente pour nous aider à mieux comprendre les différences de consommation obtenues avec les trajectoires du calcul direct et du calcul à rebours. Il s'agit d'un cas théorique étudié dans le cadre de ce travail et qui ne fait généralement pas partie d'une croisière typique.

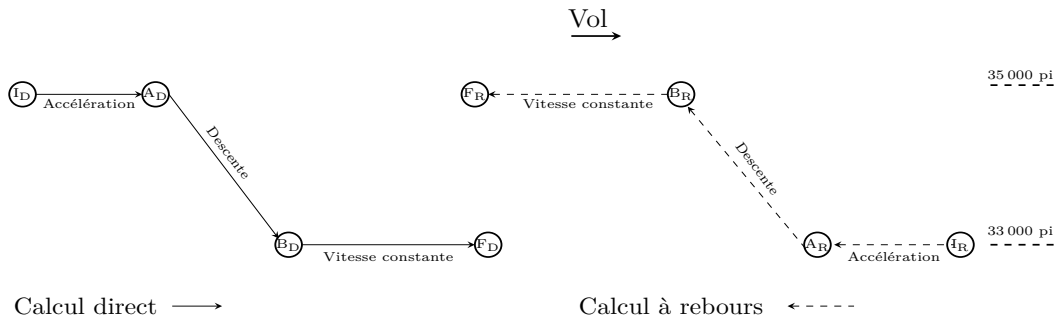


Figure 3.8 Scénarios d'un arc de descente de 35 000 pi à 33 000 pi.

La figure 3.8 illustre un arc de descente. On y indique l'ordre des étapes pour le calcul direct et pour le calcul à rebours. L'étape à altitude et à vitesse constantes est toujours la dernière.

### 3.6.2 Vérification et analyse des consommations du calcul direct et du calcul à rebours

Nous illustrons à la figure 3.9 les consommations calculées avec le calcul direct et le calcul à rebours pour le cas d'un arc de montée. Pour chacun des deux calculs,  $M_{\text{accél}}$ ,  $M_{\text{montée}}$  et  $M_{\text{vitesseConst}}$  désignent respectivement les consommations de carburant en kg calculées sur le segment d'accélération, sur le segment de changement d'altitude et sur le segment à vitesse et à altitude constantes. La différence entre la consommation totale du calcul direct et la consommation totale du calcul à rebours est autour de 6 kg. Ensuite, nous vérifions le calcul numérique direct en le comparant avec le calcul à rebours. Enfin, nous expliquons les différences de consommation constatées entre les deux calculs.

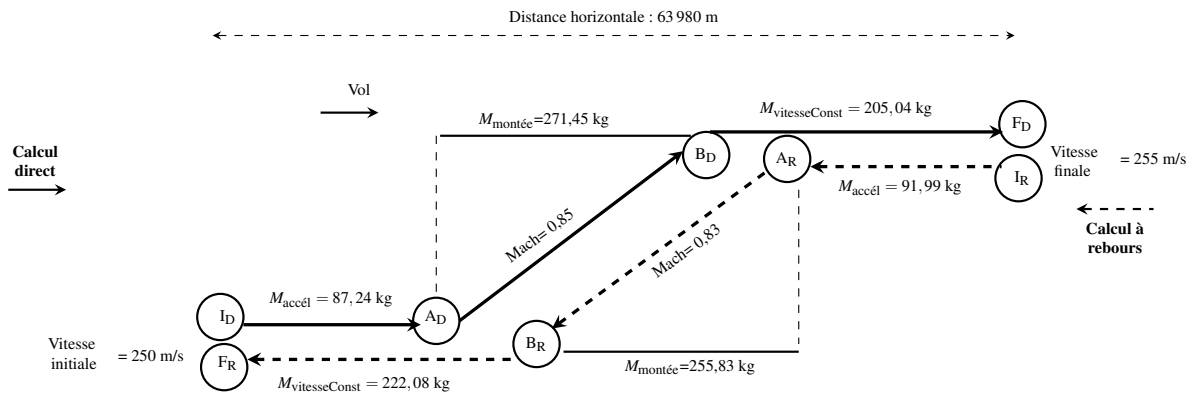


Figure 3.9 Consommations obtenues pour le cas de la montée.

### Vérification du calcul direct

Nous avons vu dans les sections précédentes que le calcul direct et le calcul à rebours ne se font pas avec les mêmes paramètres (masse, vitesse et altitude). Pour vérifier la précision du calcul direct, nous proposons de le refaire en utilisant les mêmes paramètres. Nous donnons, au tableau 3.3, les paramètres du calcul à rebours dont les valeurs seront utilisées pour le nouveau calcul direct.

À la figure 3.10, nous illustrons les différentes étapes de ce nouveau calcul direct. Notons que pour ce calcul, les étapes sont placées comme celles du calcul à rebours (cf. figure 3.9). En particulier, l'étape à vitesse constante est calculée la première. Nous exécutons le calcul en utilisant les paramètres du calcul à rebours énumérés au tableau 3.3.

Tableau 3.3 Choix des paramètres de vol pour le calcul direct.

Étape	Paramètres	
Accélération	Vitesse d'arrivée	Vitesse, altitude et masse de départ
Montée	Altitude d'arrivée	
Vitesse constante	Distances	

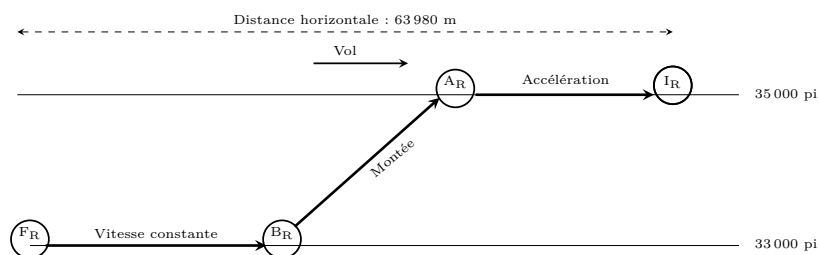


Figure 3.10 Les étapes du calcul direct avec les paramètres du calcul à rebours.

Au tableau 3.4, nous montrons les nouveaux résultats du calcul direct. Cette fois, nous avons retrouvé les mêmes consommations que celles trouvées avec le calcul à rebours en utilisant les mêmes paramètres. Cela confirme que le calcul numérique direct est précis et que les différences constatées entre les calculs proviennent des différentes valeurs utilisées pour les paramètres du tableau 3.3.

Tableau 3.4 Nouvelles consommations calculées avec le calcul direct

Étape	$M_{\text{Direct}}$ (kg)	$M_{\text{Rebours}}$ (kg)	$t_{\text{Direct}}$ (s)	$t_{\text{Rebours}}$ (s)
Accélération	91,999 089	91,999 090	37,985 809 4	37,985 809 5
Montée	255,830 163 351	255,830 163 352	102,182 385 535 3	102,182 385 535 8
Vitesse et altitude constantes	222,085 192 21	222,085 192 22	116,029 871 824	116,029 871 825

### Analyse détaillée de la différence de consommations du calcul direct et du calcul à rebours

Analysons la consommation de l'étape à vitesse constante. Cette étape se fait à l'altitude inférieure (33 000 pi) pour le calcul à rebours, et à l'altitude supérieure (35 000 pi) pour le calcul direct. Nous savons que le vol à l'altitude supérieure consomme moins que le vol à l'altitude inférieure. Donc, le calcul direct consomme moins que le calcul à rebours pour cette étape. Remarquons qu'on trouve la situation inverse pour l'étape d'accélération. Cette étape se fait à l'altitude supérieure (35 000 pi) pour le calcul à rebours, et à l'altitude inférieure (33 000 pi) pour le calcul direct. Dans ce cas, le calcul direct consomme plus que le calcul à rebours. La différence

de consommation entre les deux calculs est plus importante pour l'étape à vitesse constante que pour l'étape d'accélération. Ceci vient du fait que l'étape à vitesse constante est plus longue. La consommation de cette étape domine donc et le calcul direct donne une consommation plus petite que celle du calcul à rebours pour l'arc entier. C'est ce que nous constatons au tableau 3.2 pour le cas des montées 1, 3 et 5.

Il y a d'autres éléments (paramètres) qui ont un effet sur les différences de consommation entre les deux calculs, à savoir les vitesses et les masses. À la figure 3.9, nous illustrons ces différents paramètres. Les étapes d'accélération du calcul direct et du calcul à rebours ne se font pas avec les mêmes vitesses initiales et finales. Elles se font également à différentes altitudes ; même remarque pour les étapes à vitesse constante. Pour l'étape de montée, les deux calculs s'effectuent avec des nombres de Mach qui sont proches, mais ils ne se font pas au même endroit. Pour évaluer l'effet de la masse sur les différences de consommation, nous avons fait varier la masse de référence du calcul à rebours, ce qui est équivalent à faire varier aussi la masse du calcul direct. Nous trouvons qu'avec cette nouvelle masse, les différences de consommation n'ont pas beaucoup changé. Nous avons fait la même vérification pour déterminer l'effet de la vitesse sur les différences de consommation. Nous avons choisi une nouvelle vitesse pour le calcul direct. En particulier, nous prenons la vitesse du calcul à rebours plutôt que la vitesse du calcul direct. Nous effectuons un nouveau calcul direct avec cette vitesse et nous trouvons que ce changement de vitesse n'a pas beaucoup modifié les différences de consommation. Ces vérifications nous ont permis de conclure que les vitesses et les masses n'ont pas un impact important sur les différences de consommation du calcul direct et du calcul à rebours et qu'elles sont dues principalement aux différences d'altitudes des étapes d'accélération et des étapes à vitesse constante. Dans nos vérifications, nous avons aussi étudié le cas de la descente. La figure 3.11 ci-dessous montre les distances de l'étape d'accélération et de l'étape à vitesse constante de l'arc de descente pour le calcul direct et pour le calcul à rebours.

Le scénario de l'arc de descente est différent de celui de l'arc de montée. Effectivement, l'étape à vitesse constante dans ce cas se fait à l'altitude inférieure (33 000 pi) pour le calcul direct, et à l'altitude supérieure (35 000 pi) pour le calcul à rebours, alors que l'étape d'accélération se fait à l'altitude inférieure (33 000 pi) pour le calcul à rebours, et à l'altitude supérieure (35 000 pi) pour le calcul direct. Pour cet arc de descente, la consommation de l'étape à vitesse constante est aussi supérieure à la consommation de l'étape d'accélération pour les deux calculs. Puisque la consommation de l'étape à vitesse constante du calcul direct est plus grande que celle du calcul à rebours, le calcul direct dans ce cas donne une consommation plus grande que le calcul à rebours pour l'arc entier. C'est ce que nous remarquons aussi au tableau 2 pour le cas des descentes 2, 4 et 6. Comme dans le cas de l'arc de montée, nous tirons les mêmes conclusions à propos des différences de consommations et nous vérifions notre hypothèse qui dit que les différences de consommation sont dues principalement aux différences d'altitudes des étapes.

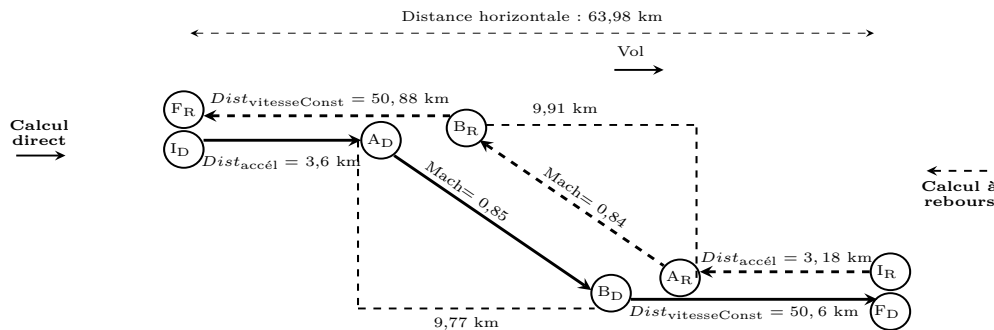


Figure 3.11 Les distances parcourues pour le scénario de la descente.

### 3.6.3 Comparaison de consommations sur les arcs de montée des trajectoires du calcul direct et du calcul à rebours

Nous effectuons une deuxième fois le calcul direct et le calcul à rebours sur un arc d'un degré plutôt que sur un arc d'un demi-degré et en considérant les vitesses et les masses calculées sur la trajectoire optimale obtenue, car cette trajectoire est composée d'arcs de 1 degré. Nous trouvons une différence de consommation d'environ 25 kg, alors qu'elle est de 6 kg pour le cas d'un arc d'un demi-degré. Nous ne pouvons pas affirmer que la montée obtenue du calcul direct ou que la montée obtenue du calcul à rebours représentent la montée optimale. Pour cette raison, dans ce qui suit, nous proposons de déterminer avec précision la montée optimale, toujours sur le même arc.

#### Détermination de la montée optimale

À la figure 3.12, nous illustrons les points  $X_D$ ,  $X_R$  et  $X_{Opt}$  qui représentent, respectivement, les positions où commencent la montée du calcul direct, la montée du calcul à rebours et la montée optimale. La position optimale  $X_{Opt}$  est l'endroit où l'appareil atteint la masse qui lui permet de voler au prochain palier d'altitude sans dépasser l'altitude maximale permise pour cette masse. Nous pouvons déterminer la position  $X_{Opt}$  en interpolant sur le segment à vitesse constante ( $X_I, X_R$ ).

#### Nouveaux calculs direct et à rebours en considérant la montée optimale

Nous effectuons le calcul direct et le calcul à rebours une nouvelle fois en choisissant cette fois-ci le trajet qui inclut la montée optimale illustrée à la figure 3.12. L'étape à vitesse constante du calcul à rebours se trouve à l'altitude inférieure. On retrouve également une étape à vitesse constante à l'altitude inférieure pour le calcul optimal, mais cette étape n'a pas la même longueur que celle du calcul à rebours. Le calcul optimal donne la consommation de cette étape sur une distance plus petite que celle du calcul à rebours. La distance qui correspond à cette différence sera parcourue à l'altitude supérieure pour le calcul optimal (cf. figure 3.13).





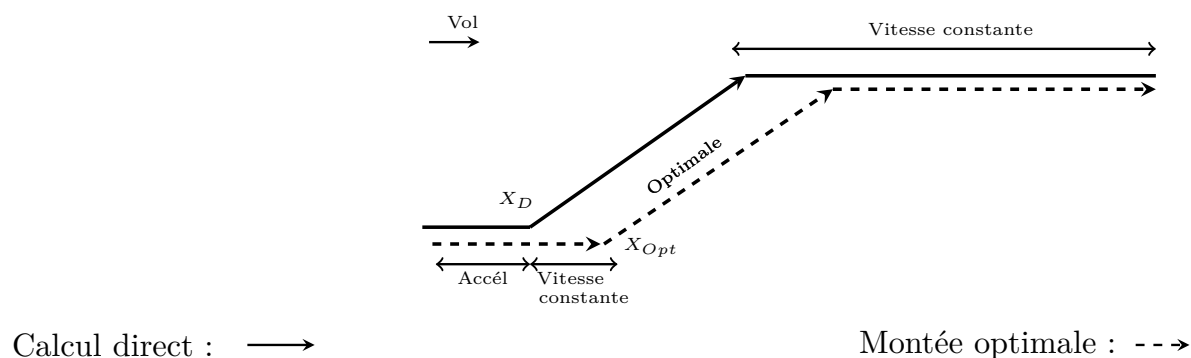


Figure 3.14 Les étapes du nouveau calcul direct.

### 3.7 Conclusion

Nous avons comparé les résultats du calcul direct et du calcul à rebours. Les algorithmes implémentés pour les schémas d'intégration ont été vérifiés. Des différences de consommation ont été constatées entre les deux calculs sur le segment d'accélération, sur le segment de changement d'altitude et sur le segment à vitesse et à altitude constantes. Nous avons montré que les paramètres en fonction desquels le calcul direct et le calcul à rebours dépendent sont la masse de l'avion, sa vitesse et les altitudes des deux paliers entre lesquels le changement d'altitude aurait lieu. Ces paramètres ont été introduits au tableau 3.3. À la section 3.6.3, nous avons montré que la différence de consommation n'a pas beaucoup changé lorsqu'on avait fait varier la masse et la vitesse. Par contre, on a montré que ces différences proviennent principalement des différentes positions où le changement d'altitude a eu lieu pour les deux calculs. Nous avons donc vérifié notre hypothèse que l'altitude est le paramètre le plus important qui influence les différences de consommation.

## CHAPITRE 4

### OPTIMISATION DE LA PRÉCISION ET DU TEMPS DE CALCUL POUR LA PHASE DE CROISIÈRE

#### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons une analyse des calculs de trajectoires qui servent à la mise à jour d'un plan de vol. Notre objectif est d'avoir un calcul précis qui nécessite un temps de calcul minimal. Le calcul des trajectoires est basé sur des schémas d'intégration qui permettent de discrétiser les équations différentielles (3.17), (3.18), (3.19) et (3.20) du système défini au chapitre 3. Pour atteindre cet objectif, nous allons utiliser différents schémas numériques<sup>1</sup>. Nous proposons pour cela des schémas de la famille Runge-Kutta ; à savoir le schéma d'Euler explicite qui est d'ordre 1, le schéma de Runge-Kutta d'ordre 2 (RK2) et le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4). Nous voulons étudier l'influence du choix des schémas sur la précision de calcul ainsi que sur le temps de calcul. À la section 4.2, nous allons vérifier l'implémentation de chaque schéma numérique choisi en déterminant numériquement son ordre de convergence, en comparaison avec l'ordre de convergence théorique. À la section 4.3, nous allons proposer une démarche pour minimiser l'erreur et le temps de calcul en fonction des schémas numériques et de la taille du pas d'intégration. Pour ce qui est du choix des schémas, nous proposons une procédure de calcul qui sera appliquée à la trajectoire de la phase de croisière calculée au chapitre 3, i.e. la phase de croisière qui comporte une série d'arcs à altitude constante avec un seul changement de palier (arc de montée).

#### 4.2 Analyse numérique des calculs

La figure 4.1 illustre la phase de croisière d'une trajectoire typique d'un plan de vol. Elle est composée de plusieurs arcs. Le calcul des coûts de cette trajectoire se fait sur trois types d'arcs. Le premier type est un arc avec accélération. Le calcul sur ce dernier se fait sur un segment d'accélération puis sur un segment à vitesse et à altitude constantes. Le deuxième est un arc de changement d'altitude constitué d'un segment d'accélération, d'un segment de changement d'altitude et d'un segment à vitesse et à altitude constantes. Le troisième est un arc à vitesse constante. Il est représenté par un segment à vitesse et à altitude constantes. Le calcul des coûts pour cette partie de trajectoire se fait donc sur les mêmes types de segments cités plus haut. Pour discrétiser ce problème, nous nous basons sur les schémas numériques d'Euler, RK2 et RK4 pour

---

1. Méthodes numériques utilisées pour approximer les solutions analytiques des équations différentielles.

lesquels nous calculons l'ordre de convergence.

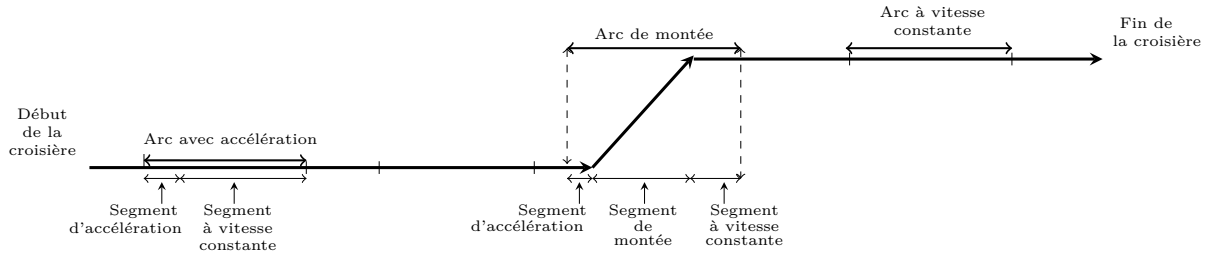


Figure 4.1 Phase de croisière de la trajectoire.

#### 4.2.1 Le calcul des coûts sur les différents segments

##### Segment d'accélération

Le calcul de la consommation pour le segment d'accélération se fait en calculant les valeurs des variables du tableau 4.1 selon l'ordre donné. Il fait intervenir le calcul de la masse volumique, de la traînée, de la poussée et de la consommation minimale. Le paramètre d'entrée de ce calcul est la différence de vitesse  $\Delta V$ . Ce paramètre nous permet aussi de calculer le temps de parcours  $\Delta T$  qui est donné selon la formule  $\Delta T \times \frac{dV}{dt} = \Delta V$ , où  $\frac{dV}{dt}$  désigne l'accélération sur le segment d'accélération. À la fin, nous déterminons la consommation de carburant  $\Delta M$  en kg, selon la formule

$$\Delta M = FF_{cr} \times \Delta T. \quad (4.1)$$

Tableau 4.1 Les variables sur le segment d'accélération.

Variable	Description	Équation
$\rho$	masse volumique (kg/m <sup>3</sup> )	(3.14)
$D$	traînée (N)	(3.10)
$T_{\max}$	poussée maximale (N)	(3.11)
$\frac{dV}{dt}$	accélération (m/s <sup>2</sup> )	(3.6)
$T$	poussée (N)	(3.13)
$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{\min}$	débit minimum (kg/s)	(3.8)
$FF_{cr} = -\frac{dm}{dt}$	flux du carburant (kg/s)	(3.7)

### Segment de changement d'altitude (montée ou descente)

Pour le cas du segment de changement d'altitude, les étapes de calcul se font à l'aide des variables décrites au tableau 4.2. Le calcul de la consommation se fait selon la formule (4.1), où  $\Delta T$  désigne le temps de parcours qu'on peut aussi déterminer à l'aide de la formule

$$\Delta T \times \frac{dh}{dt} = \Delta h, \quad (4.2)$$

où  $\Delta h$  désigne le changement d'altitude effectué sur ce type de segment.

Tableau 4.2 Les variables sur le segment de changement d'altitude

Variable	Description	Équation
$\rho$	masse volumique (kg/m <sup>3</sup> )	(3.14)
$\eta$	consommation spécifique de carburant (kg s <sup>-1</sup> N <sup>-1</sup> )	(3.21)
$D$	traînée (N)	(3.10)
$T_{\max}$	poussée maximale (N)	(3.11)
$ESF$	Energie Share Factor (sans unité)	(3.5)
$\frac{dh}{dt}$	taux de montée (m/s)	(3.3)
$\frac{dV}{dt}$	accélération (m/s <sup>2</sup> )	(3.6)
$T$	poussée (N)	(3.13)
$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{\min}$	débit minimum (kg/s)	(3.8)
$FF_{cr} = -\frac{dm}{dt}$	flux du carburant (kg/s)	(3.7)

### Segment à vitesse et à altitude constantes

Le calcul de la consommation sur le segment à vitesse et à altitude constantes se fait aussi en faisant appel aux variables décrites au tableau 4.2. Aussi, nous déterminons le temps de parcours  $\Delta T$  à l'aide de la formule  $\Delta T = \frac{\Delta x}{V}$ , où  $\Delta x$  et  $V$  désignent respectivement la distance à parcourir et la vitesse constante du vol. La consommation de carburant est déterminée à l'aide de l'équation (4.1).

#### 4.2.2 Schémas numériques

Les schémas numériques décrits dans cette section permettent de calculer une approximation de la solution des équations différentielles de la forme :

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \forall t \in [0, T], \quad y(0) = y_0,$$

où  $y$  représente la variable dépendante de l'équation différentielle et  $y_0$  désigne la valeur initiale de  $y$  au temps  $t = t_0$ .

### Schéma d'Euler explicite

Le schéma d'Euler explicite est un schéma précis à l'ordre 1. On estime  $y$  à l'instant  $t_{n+1}$  en n'utilisant que l'approximation  $y_n$  au temps précédent  $t_n$  selon la formule suivante :

$$\begin{cases} \Delta t = t_{n+1} - t_n & (\text{pas de temps}); \\ y_{n+1} = y_n + \Delta t f(t_n, y_n). \end{cases}$$

### Schéma de Runge-Kutta d'ordre 2

Ce schéma est plus précis que le schéma d'Euler. Il donne une estimation de  $y$  en faisant deux évaluations du membre de droite  $f$ . La première évaluation nous donne la valeur de  $y_{n+\frac{1}{2}}$  qui est l'approximation de  $y$  à l'instant  $t_n + \frac{\Delta t}{2}$  (le point milieu de l'intervalle de temps  $[t_n, t_{n+1}]$ ). La deuxième évaluation nous donne  $y_{n+1}$  qui est l'estimation de  $y$  à l'instant  $t_{n+1}$ . Le schéma s'écrit :

$$\begin{cases} \Delta t = t_{n+1} - t_n & (\text{pas de temps}); \\ y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{\Delta t}{2} f(t_n, y_n); \\ y_{n+1} = y_n + \Delta t f(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_{n+\frac{1}{2}}). \end{cases}$$

L'ordre de précision théorique de ce schéma est 2.

### Schéma de Runge-Kutta d'ordre 4

Le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 est plus précis que les schémas d'Euler et de Runge-Kutta d'ordre 2. L'estimation  $y_{n+1}$  de  $y$  à l'instant  $t_{n+1}$  est donnée par :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

où  $\Delta t$  désigne le pas de temps et les coefficients  $k_1, k_2, k_3$  et  $k_4$  sont calculés selon les formules :

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, y_n); \\ k_2 = f(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta t}{2} k_1); \\ k_3 = f(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta t}{2} k_2); \\ k_4 = f(t_n + \Delta t, y_n + \Delta t k_3). \end{cases}$$

L'ordre de précision théorique de ce schéma est 4.

### 4.2.3 Erreur sur le calcul de la consommation et vérification de la convergence des schémas sur les segments de calcul

Comme mentionné à la section 3.3, les calculs effectués sur chaque segment de calcul se font avec des pas d'intégration différents des pas de temps  $\Delta t$  souvent utilisés dans les calculs numériques. Pour chaque type de segment, le pas de temps  $\Delta t$  sera exprimé en fonction du pas d'intégration correspondant au segment. Les pas d'intégration sur le segment à vitesse et à altitude constantes, sur le segment de changement d'altitude et sur le segment d'accélération, sont respectivement  $\Delta x$ ,  $\Delta h$  et  $\Delta V$ . Chacun des segments est divisé en sous-segments. La longueur de chaque sous-segment correspond à la longueur du pas d'intégration du segment utilisé. Nous avons donc un sous-segment de vitesse de longueur  $\Delta V$ , un sous-segment de changement d'altitude de longueur  $\Delta h$  et un sous-segment de distance de longueur  $\Delta x$ . Nous allons faire varier la taille du pas d'intégration pour chacun des segments de calcul et des schémas numériques. Nous voulons savoir comment la taille du pas d'intégration influence le calcul de consommation. Nous nous attendons à un calcul plus précis de la consommation lorsque le pas d'intégration est plus petit. Ensuite, nous allons déterminer l'ordre de convergence numérique (expérimental) des schémas d'Euler, de Runge-Kutta d'ordre 2 et de Runge-Kutta d'ordre 4. Dans notre cas, le nombre de pas d'intégration est choisi entre 1 et 35. Plus précisément, nous avons choisi pour le segment d'accélération des pas d'intégration (pas de vitesse) de longueur  $\Delta V$  compris entre  $\frac{\delta V}{35}$  et  $\delta V$ , où  $\delta V$  désigne la différence des vitesses aux deux extrémités du segment d'accélération. Sur le segment de changement d'altitude, nous choisissons les tranches d'altitude comme pas d'intégration. La longueur de ce pas est choisie entre  $\frac{\delta h}{35}$  et  $\delta h$ , où  $\delta h$  désigne la distance verticale du segment de changement d'altitude. Finalement, pour le segment à vitesse et à altitude constantes, nous considérons le pas de distance horizontale  $\Delta x$  comme pas d'intégration. La longueur de ce pas est choisie également entre  $\frac{\delta x}{35}$  et  $\delta x$ , où  $\delta x$  représente la longueur du segment à altitude et à vitesse constantes.

### Erreur sur le calcul de la consommation

Les figures 4.2, 4.3, 4.4 et 4.5 illustrent respectivement l'erreur sur le calcul de la consommation estimée sur un segment d'accélération de longueur  $\delta V = 1$  m/s, sur un segment de changement d'altitude de longueur  $\delta h = 2\,000$  pi, sur un segment à vitesse et à altitude constantes de longueur  $\delta x \simeq 55,55$  km et sur un segment à vitesse et à altitude constantes de longueur  $\delta x \simeq 111,11$  km. Pour estimer cette erreur, nous utilisons le schéma d'Euler, le schéma RK2 et le schéma RK4. Pour les trois types de segment, nous évaluons l'erreur sur le calcul de la consommation par rapport à la consommation calculée avec le schéma RK4 en utilisant 35 pas d'intégration. Ce schéma étant le plus précis, on considère cette approximation comme notre solution quasi-analytique.

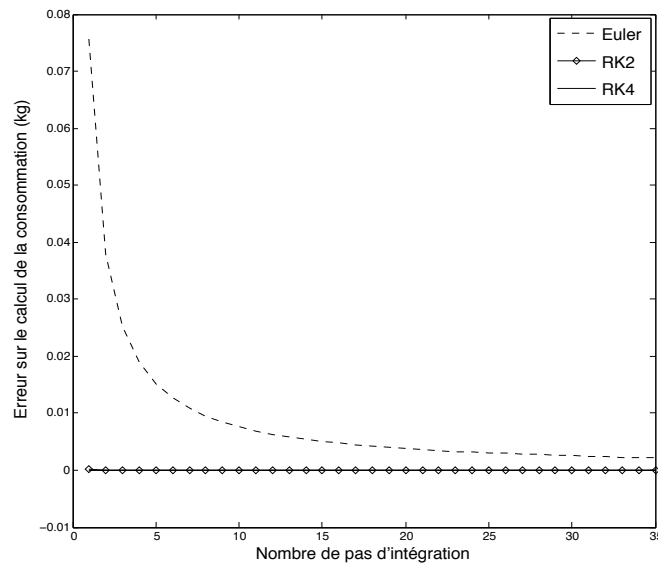


Figure 4.2 Approximation de l'erreur sur le calcul de la consommation en fonction du nombre de pas d'intégration, sur un segment d'accélération de longueur  $\delta V = 1$  m/s.

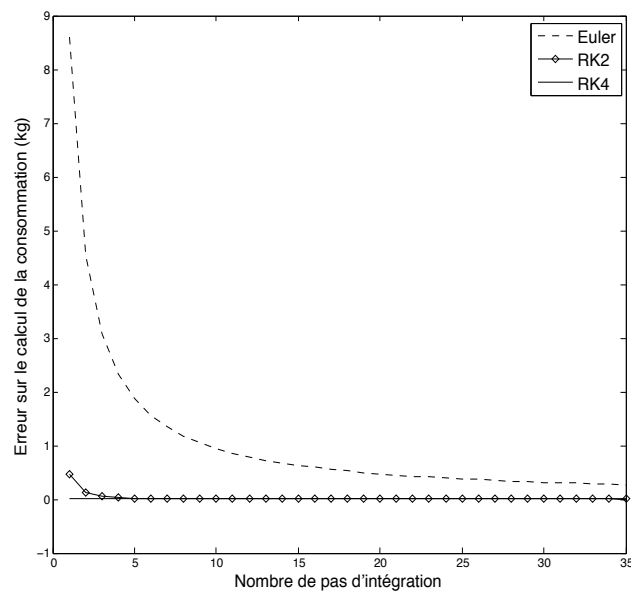


Figure 4.3 Approximation de l'erreur sur le calcul de la consommation en fonction du nombre de pas d'intégration, sur un segment de changement d'altitude de longueur  $\delta h = 2\,000$  pi.

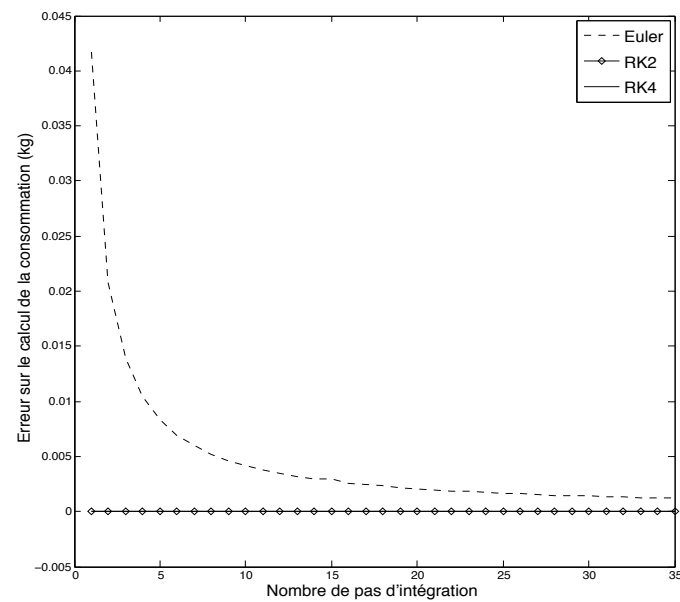


Figure 4.4 Approximation de l'erreur sur le calcul de la consommation en fonction du nombre de pas d'intégration, sur un segment à vitesse et à altitude constantes de longueur  $\delta x = 55,55$  km.

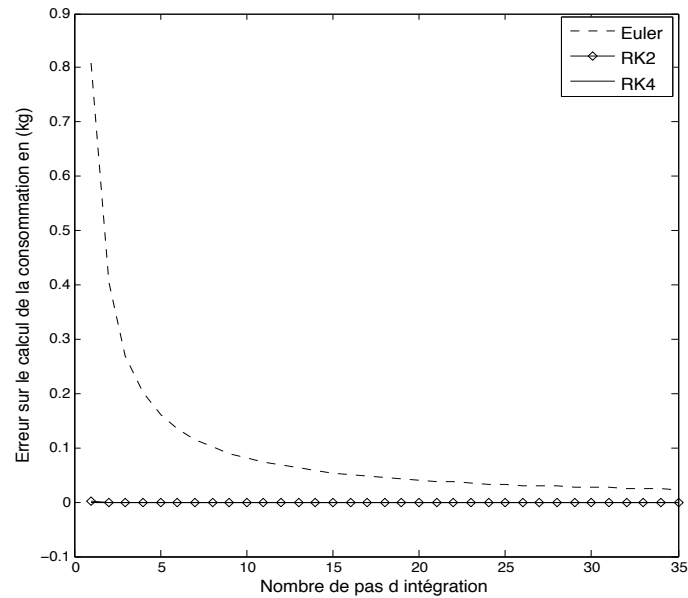


Figure 4.5 Approximation de l'erreur sur le calcul de la consommation en fonction du nombre de pas d'intégration, sur un segment à vitesse et à altitude constantes de longueur  $\delta x = 111,11$  km.



Les figures nous permettent de constater une erreur sur le calcul de la consommation moindre pour le segment à vitesse et à altitude constantes, et ce même avec un seul pas d'intégration. Ceci montre que la précision du calcul avec le schéma d'Euler pourrait être suffisante sur ces segments puisque ce schéma est aussi précis que les schémas RK2 et RK4. Pour le segment de changement d'altitude, le calcul avec les schémas RK2 et RK4 avec un seul pas d'intégration donne une erreur de moins de 1 kg alors qu'avec le schéma d'Euler, l'erreur est entre 8 kg et 9 kg.

### Vérification de l'ordre de convergence des schémas sur les segments de calcul

Pour vérifier la convergence des schémas d'Euler, RK2 et RK4 qu'on a implementés pour le calcul de consommation, nous allons déterminer numériquement l'ordre de convergence de chaque schéma et vérifier qu'il est égal à l'ordre de convergence théorique. Cette vérification a été faite pour chaque type de segment de calcul. Nous présentons dans ce qui suit le résultat de la vérification dans le cas d'un segment de changement d'altitude où une grande erreur a été trouvée. Nous illustrons à la figure 4.6 les courbes log-log de l'erreur commise par chaque schéma en fonction du nombre de pas d'intégration. La formule suivante a été utilisée pour estimer l'ordre de convergence de chaque schéma :

$$\text{ordre} = \frac{|\log(\text{erreur}_{k+1}) - \log(\text{erreur}_k)|}{|\log(\text{pas}_{k+1}) - \log(\text{pas}_k)|}, \quad (4.3)$$

où  $\text{erreur}_k$  désigne l'erreur commise en utilisant le nombre de pas d'intégration  $\text{pas}_k$ .

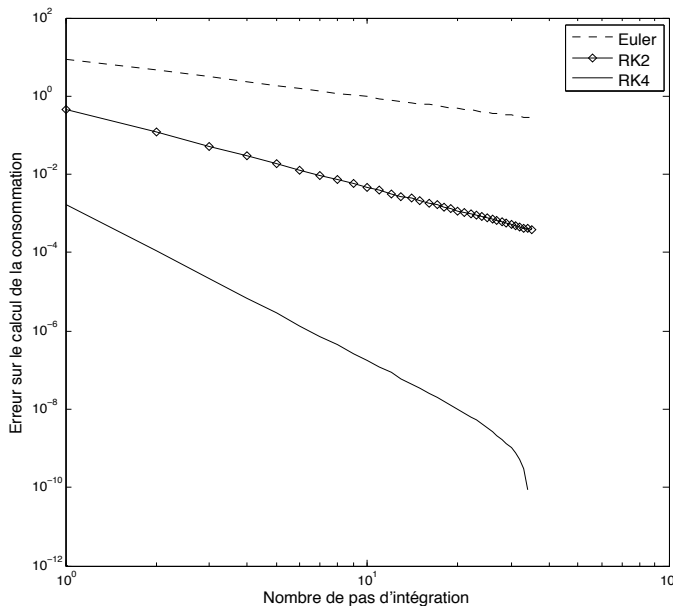


Figure 4.6 Courbes log-log de l'erreur sur le segment de changement d'altitude.

L'ordre de convergence de chaque schéma est présenté au tableau 4.3. Ils correspondent à l'ordre de convergence théorique.

Tableau 4.3 Estimation de l'ordre de convergence des schémas d'intégration.

Schéma numérique	Ordre
RK4	4,000
RK2	2,008
Euler	0,997

### 4.3 Choix de la stratégie de discrétisation sur la phase de croisière

#### 4.3.1 Les calculs sur la phase de croisière

Comme mentionné précédemment, le calcul de la trajectoire optimale est basé sur l'algorithme du plus court chemin qui permet de déterminer le chemin de coût minimum dans un graphe constitué de nœuds de la grille de calcul. Pour cela, pour chaque nœud du graphe, l'algorithme évalue le coût de chaque arc qui connecte ce nœud à ses successeurs. À la fin, les arcs retenus de ce graphe constituent la trajectoire optimale. À la figure 4.7, nous illustrons une partie de la phase de croisière où on met en évidence les nœuds successeurs des nœuds du graphe associé à la grille du calcul. Nous joignons chaque nœud qui se trouve à une certaine longitude à ses sept successeurs. Cinq successeurs sont à la même altitude, marqués par des petits cercles et mis dans un plan qu'on illustre en pointillé à la figure 4.7. Deux autres successeurs sont illustrés avec des croix et se trouvent sur des altitudes différentes. Nous rappelons qu'en général, un arc est composé de trois types de segment (segment d'accélération, segment de changement d'altitude et segment à vitesse et à altitude constantes). Pour qu'un arc joignant un nœud et son successeur soit retenu dans la trajectoire optimale, le simulateur de plan de vol devrait effectuer jusqu'à 10 500 évaluations. Ce nombre d'évaluations correspond au nombre d'arcs évalués dans la grille de calcul. La phase de croisière nécessite donc davantage de calculs sur les arcs à altitude constante, i.e. les arcs incluant des segments d'accélération et des segments à vitesse et à altitude constantes. À la sous-section suivante, nous allons mettre en évidence ces calculs qui nous permettront de choisir les schémas convenables.

#### 4.3.2 Choix des schémas

Une partie des ressources de calcul dans un simulateur de plan de vol est consacrée à la discrétisation du système d'équations différentielles. Celle-ci est caractérisée par sa précision et par son temps d'exécution. Les calculs se font en évaluant les coûts de deux types d'arcs. Un arc à

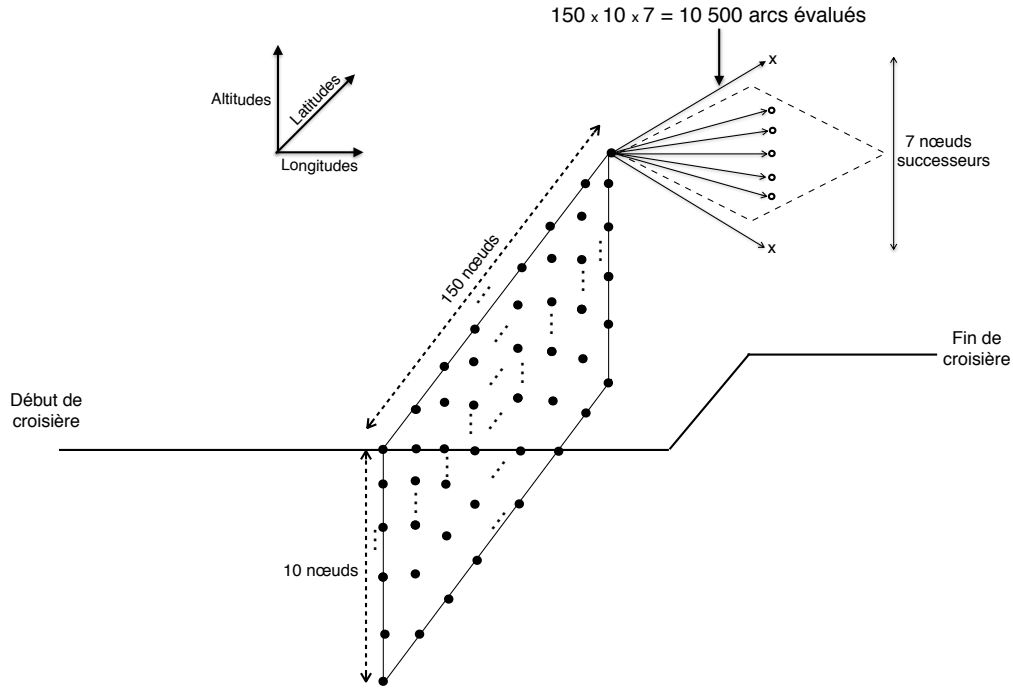


Figure 4.7 Les arcs évalués sur la phase de croisière à un niveau de longitude.

altitude constante qui est composé d'un segment d'accélération et d'un segment à vitesse et à altitude constantes, et un arc de changement d'altitude qui contient un segment d'accélération, un segment de changement d'altitude et un segment à vitesse et à altitude constantes. Nous allons chercher la meilleure combinaison de discrétisations sur ces segments pour avoir la plus grande précision possible tout en minimisant le temps de calcul. On désigne par le triplet  $(\text{schéma}_1, \text{schéma}_2, \text{schéma}_3)$  la stratégie qui utilise le  $\text{schéma}_1$  pour l'étape de calcul sur le segment d'accélération, le  $\text{schéma}_2$  pour l'étape de calcul sur le segment de changement d'altitude et le  $\text{schéma}_3$  pour l'étape de calcul sur le segment à vitesse et à altitude constantes. La stratégie utilisée pour les calculs direct et à rebours, décrits à la section 3.1, est la stratégie  $(\text{RK4}, \text{RK4}, \text{RK4})$  où le schéma RK4 est utilisé pour le calcul des coûts sur tous les segments. Nous avons déjà illustré aux figures 4.2, 4.3, 4.4 et 4.5 les erreurs sur le calcul de consommation des schémas d'Euler, RK2 et RK4 et ce, pour chaque type de segment. Les résultats ont montré que l'erreur commise sur un segment d'accélération est de l'ordre de quelques grammes. Sur les segments à vitesse et à altitude constantes d'un demi-degré de longitude ou d'un degré de longitude, l'erreur commise est moins de 1 kg. Pour le segment de changement d'altitude (segment de montée), l'erreur est de l'ordre de quelques kilogrammes pour le schéma d'Euler, alors qu'elle est de quelques centaines de grammes pour le schéma RK2. D'autre part, nous avons montré à la sous-section précédente que le calcul de la trajectoire optimale prend en compte un

nombre important d'évaluations des arcs à altitude constante qui incluent des segments d'accélération et des segments à vitesse et à altitude constantes. Pour réduire le temps de calcul, nous proposons d'utiliser des schémas qui nécessitent moins d'étapes de calcul sur ces segments et dont la précision est acceptable. Nous choisissons pour cela les schémas d'Euler et RK2. Par la suite, nous allons présenter une procédure qui permet de trouver de meilleures stratégies de calcul en fonction de la tolérance donnée. La procédure consiste à choisir pour chaque type de segment l'un des schémas d'Euler, RK2 et RK4. Dépendamment de la marge d'erreur, la procédure décrite plus haut nous permettra de déterminer une meilleur stratégie.

#### 4.3.3 Stratégie de discrétisation

À la figure 4.8, nous illustrons les étapes de la procédure que l'on va appliquer sur la trajectoire de la croisière et sur la trajectoire de vol pour identifier la meilleure stratégie.

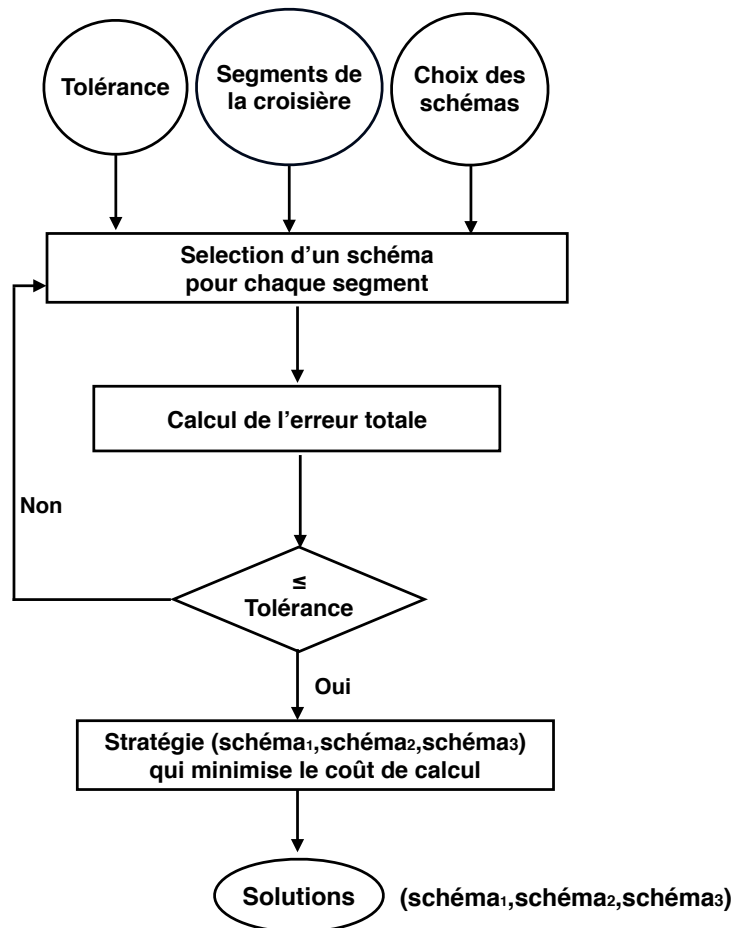


Figure 4.8 Choix de la stratégie de discrétisation sur une trajectoire de la croisière.

On lance le calcul du coût sur tous les segments de la trajectoire en choisissant un seul pas d'intégration et en faisant varier le schéma utilisé, puis nous sélectionnons les stratégies qui donnent une erreur inférieure à une marge définie (ou tolérance donnée). Parmi les stratégies sélectionnées, nous choisissons la stratégie la moins coûteuse en temps de calcul. Notons que le calcul de l'erreur totale d'une stratégie est effectué par rapport à la stratégie de référence (RK4,RK4,RK4) avec 10 pas d'intégration, où le schéma RK4 avec 10 pas d'intégration représente notre approximation la plus précise.

#### 4.3.4 Résultats sur la phase de croisière

Nous présentons les résultats de calcul obtenus en utilisant les différentes stratégies du tableau 4.4. Celles-ci représentent les combinaisons de schémas candidates dans la procédure illustrée à la figure 4.8. Pour chacune des stratégies du tableau, nous déterminons les erreurs de calcul par rapport à la stratégie de référence. Nous donnons les erreurs sur la consommation pour la trajectoire de la phase de croisière et leur pourcentage par rapport à la consommation totale. Nous donnons aussi les erreurs sur la consommation pour la trajectoire du vol incluant toutes les phases ainsi que leur pourcentage par rapport à la consommation totale.

Tableau 4.4 Erreurs obtenues sur la consommation suite aux calculs numériques et leur pourcentage par rapport à la consommation totale pour tout le vol et pour la croisière.

Stratégies	Trajectoire de la croisière		Trajectoire du vol	
	Erreur sur la consommation (kg) [tolérance $\leq 45$ kg]	Pourcentage de l'erreur par rapport à la consommation totale (%)	Erreur sur la consommation (kg) [tolérance $\leq 120$ kg]	Pourcentage de l'erreur par rapport à la consommation totale (%)
[RK4,RK4,RK4]	0,03	0,0001	0,73	0,002
[EUL,EUL,EUL]	35,05	0,1000	114,86	0,29
[EUL,EUL,RK2]	14,26	0,0411	82,66	0,21
[EUL,RK2,EUL]	18,99	0,0551	72,66	0,18
[RK2,EUL,EUL]	37,42	0,1091	63,82	0,16
[EUL,RK2,RK2]	1,54	0,0041	40,84	0,10
[RK2,EUL,RK2]	16,63	0,0481	31,54	0,08
[RK2,RK2,EUL]	21,35	0,0621	21,59	0,05
[RK2,RK2,RK2]	0,83	0,0021	10,32	0,03

Au tableau 4.5, nous donnons les temps de calcul des schémas, les temps de calcul totaux et leurs pourcentages par rapport à la stratégie la plus précise (RK4,RK4,RK4). sur la phase de croisière et leurs pourcentage de réduction en comparant avec l'évaluation la plus précise et plus coûteuse en temps, soit la stratégie (RK4, RK4, RK4). Ce calcul fait partie du calcul de la trajectoire optimale déjà illustré à la figure 3.4 du chapitre 3. Le temps de calcul de la trajectoire optimale est la somme des temps de calcul des schémas de discrétisation et des temps des interpolations aux nœuds de la grille de calcul. Deux interpolations sont utilisées ; l'interpolation en temps et l'interpolation en espace. Nous trouvons également dans le même tableau les pourcentages des temps des schémas par rapport au temps de calcul total de la trajectoire optimale.

Tableau 4.5 Réductions des temps de calcul des schémas et des temps de calcul totaux.

Stratégies	Temps de calcul des schémas (s)	Réduction du temps de calcul des schémas (%)	Temps total du calcul de la trajectoire optimale (s)	Réduction du temps total du calcul de la trajectoire optimale (%)
[RK4,RK4,RK4]	0,107		0,95	
[EUL,EUL,EUL]	0,026	75,7	0,86	9,47
[EUL,EUL,RK2]	0,028	73,8	0,87	7,94
[EUL,RK2,EUL]	0,031	71,0	0,88	7,48
[EUL,RK2,RK2]	0,034	68,2	0,88	7,25
[RK2,EUL,EUL]	0,041	61,7	0,88	7,27
[RK2,EUL,RK2]	0,044	58,9	0,88	2,23
[RK2,RK2,EUL]	0,047	56,0	0,89	2,06
[RK2,RK2,RK2]	0,049	54,2	0,89	1,99

#### 4.3.5 Interprétation des résultats

Dans les paragraphes qui suivent, nous allons interpréter les résultats des tableaux 4.4 et 4.5. Plus précisément, nous analyserons le choix des schémas et l'erreur sur la consommation. Il sera aussi question de la différence entre le temps de calcul des schémas et le temps de calcul total qu'on définit comme étant le temps de calcul de la trajectoire optimale.

#### Le choix des schémas et l'erreur sur la consommation

Le calcul de la trajectoire optimale nous permet de déterminer la consommation totale de carburant. L'erreur sur cette consommation est liée à la qualité des paramètres du modèle BADA, à la précision des calculs d'interpolation des données de la météo en espace et en temps et aux

calculs numériques pour la discrétisation du système d'équations différentielles. Selon le document de Nuic (2010) (section 4.2, page 44), l'erreur de calcul globale sur la consommation estimée pour la trajectoire du vol, incluant toutes les phases, est de 5% par rapport à la consommation totale. Au tableau 4.4, les stratégies qui utilisent les schémas d'Euler et RK2 sur tous les types de segments de la trajectoire de vol nous permettent d'obtenir une erreur pour le calcul de la consommation de la trajectoire du vol d'au plus 0,29% sur la consommation totale et une erreur d'au plus 0,1% sur la consommation totale pour la phase de croisière. Si l'on souhaite obtenir une erreur sur la consommation estimée sur toute la trajectoire de vol inférieure à un dixième de l'erreur de calcul globale, alors nous pouvons sélectionner plusieurs stratégies qui respectent cette tolérance. Par exemple, l'erreur numérique estimée pour la stratégie [EUL,EUL,EUL] (stratégie qui utilise le schéma d'Euler pour tous les types de segment de la trajectoire de vol), représente 0,29% de la consommation totale. Ce pourcentage représente moins qu'un dixième du pourcentage associé à l'erreur de calcul globale qui est de 5%. Pour obtenir un choix de stratégie respectant la tolérance demandée, nous traiterons dans ce qui suit du temps de calcul réservé aux schémas. Afin de faciliter l'analyse du temps de calcul, nous avons encore choisi la stratégie [EUL,EUL,EUL] comme exemple d'illustration. Nous analysons aussi pour cette stratégie les différences entre le temps de calcul des schémas et le temps de calcul total.

### **Le temps de calcul réservé aux schémas et le temps de calcul total**

Le temps de calcul total correspond au temps de calcul du calcul de la trajectoire optimale. Ce dernier est basé sur l'algorithme du plus court chemin. Ce temps est la somme des temps de calcul obtenus suite aux différentes interpolations des données de la météo, des temps de calculs des schémas numériques pour la discrétisation du système d'équations différentielles et des temps pour le calcul de la masse volumique. Le temps de calcul des schémas est en fait le temps des évaluations de ces schémas. Au tableau 4.5, nous présentons les résultats des temps de calcul pour les différentes stratégies proposés pour la phase de croisière. Nous donnons les temps de calcul des schémas pour chaque stratégie ainsi que le pourcentage de réduction du temps de calcul par rapport à la stratégie [RK4,RK4,RK4] et le pourcentage de réduction du temps de calcul total de chaque stratégie par rapport au temps de calcul total de la stratégie [RK4,RK4,RK4]. Avec la stratégie [EUL,EUL,EUL], nous avons trouvé un temps de calcul des schémas réduit d'environ 75% comparativement au temps de calcul obtenu avec la stratégie RK4, ce qui correspond à une réduction du temps de calcul du trois quart. Ce résultat vient confirmer l'hypothèse attendue puisque le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 requiert 4 évaluations du système d'équations alors que le schéma d'Euler n'en requiert qu'une seule. D'après ce même tableau, le pourcentage du temps de calcul total est réduit de 9,47% lorsqu'on utilise le schéma d'Euler dans une stratégie plutôt que le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4. On s'attendrait à une réduction de temps de calcul

total de 75% lorsqu'on utilise la stratégie [EUL,EUL,EUL] plutôt que la stratégie [RK4,RK4,RK4]. Dans l'exemple que nous venons de traiter, nous avons obtenu seulement 9,47% de réduction du temps de calcul total. Nous croyons que l'écart constaté est lié aux temps de calcul des différentes interpolations des données météorologiques ainsi qu'au calcul de la masse volumique et non aux calculs des schémas numériques. Dans ce qui suit, nous détaillerons ces parties des calculs tout en proposant des solutions nous permettant d'atteindre l'objectif visé, soit une réduction du temps total d'environ 75%.

### Les calculs à l'origine de la différence du temps de calcul total et les propositions de solutions

Dans ce paragraphe, nous allons détailler les calculs responsables de l'écart constaté en ce qui concerne le pourcentage de réduction. Nous considérons un arc de changement d'altitude de 1 degré de longitude et de latitude représenté sur une grille de 0,25 degré. À la figure 4.9, nous illustrons cet arc qui est composé d'un segment d'accélération [A,B], d'un segment de montée [B,C] et d'un segment à vitesse et à altitude constantes [C,D]. Les nœuds noirs désignent les nœuds de la grille de calcul et les nœuds blancs sont ceux de la grille NISB. Les données de la météo aux nœuds de la grille de calcul sont obtenues en interpolant entre les nœuds de la grille NISB. Pour déterminer les données de la météo aux nœuds A, B, C et D, nous effectuons d'abord l'interpolation en temps aux nœuds A et D puis, l'interpolation en espace aux nœuds B et C. En plus de ces deux calculs d'interpolation, le calcul de la masse volumique constitue la troisième partie du calcul dont il faut tenir compte.

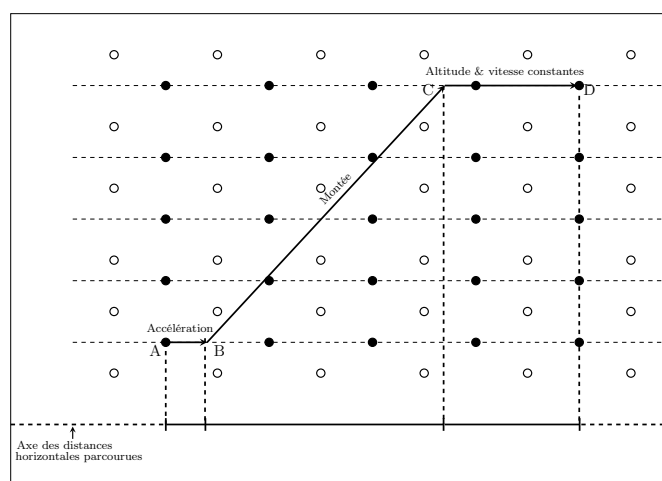


Figure 4.9 Un arc de changement d'altitude de 1 degré de longitude et de latitude représenté sur une grille fine (0,25°).



Au tableau 4.6, pour chacune des parties du calcul, nous donnons une description du calcul et nous proposons une procédure pour l'effectuer en dehors du programme de calcul de la trajectoire optimale. Nous considérons que les temps de calcul pour chaque élément de calcul avant l'utilisation de la procédure proposée sont soustraits du temps de calcul total.

Tableau 4.6 Les procédures proposées pour accélérer chaque composante des calculs.

Composante des calculs	Description	Procédure proposée
Interpolation en temps	Cette interpolation est effectuée aux extrémités des arcs. Sur la figure 4.9, on interpole aux nœuds A et D. Nous interpolons les données de la météo selon le temps de passage sur chacun de ces nœuds. Le temps de passage appartient à un intervalle de temps qui sépare deux prévisions météorologiques consécutives.	Nous pouvons effectuer à l'avance un calcul sur une grille grossière (grille de 2 degrés par exemple), et ce pour avoir les temps de passage aux nœuds de cette grille. Ensuite, nous déterminons les données de la météo des nœuds de la grille de calcul qu'on va utiliser en interpolant entre les nœuds de la grille grossière.
Interpolation en espace	Comme mentionné plus haut, les interpolations sont effectuées aux nœuds des extrémités du segment d'accélération, du segment de changement d'altitude (segment de montée) et du segment à vitesse et à altitude constantes. En plus des calculs d'interpolation en temps aux nœuds A et D qu'on a déjà traité plus haut, nous aborderons ici les interpolations en espace aux nœuds B et C qui se font en fonction des distances horizontales parcourues (cf. figure 4.9).	Nous cherchons d'abord les données de la météo sur une grille plus fine (grille de 0,25 degré). Nous illustrons, à la même figure 4.9, une partie de cette grille fine où nous avons un arc de 1 degré de longitude et de latitude. Nous pouvons déterminer les données de la météo aux nœuds B et C de deux façons : soit en prenant les données de la météo des nœuds les plus proches des nœuds dans la grille fine, soit en interpolant entre deux nœuds intermédiaires de la grille fine. Les nœuds intermédiaires sont les nœuds noirs voisins des nœuds B et C dans la grille.
Calcul de la masse volumique	Le calcul de la masse volumique intervient à l'intérieur et à l'extérieur des schémas numériques. Il s'agit du seul endroit où l'humidité relative interviendra dans le calcul.	Nous réservons un champ pour la masse volumique. Comme l'humidité relative est accessible avant d'effectuer les calculs des schémas, nous allons utiliser sa valeur pour calculer au préalable la masse volumique. Nous affectons celle-ci à son champ correspondant.

## 4.4 Conclusion

Nous avons analysé les calculs des trajectoires optimales pour lesquelles les vitesses, les masses et les altitudes de vol sont mises à jour dans les plans de vol. Ces calculs sont basés sur le calcul de la consommation du carburant qui est déterminé en discrétisant un système d'équations différentielles. L'objectif est d'obtenir un calcul de consommation qui répond à certains critères, soit le respect de certaines marges d'erreur en un temps de calcul minimal. Nous avons proposé pour cela des stratégies de calcul qui utilisent les schémas d'Euler et RK2 pour les différents types de segments. Nous avons utilisé la stratégie [EUL,EUL,EUL] (stratégie qui utilise le schéma d'Euler pour tous les segments). Le calcul avec cette stratégie nous a permis d'avoir une réduction du temps de calcul total par rapport au calcul effectué avec la stratégie [RK4,RK4,RK4]. On a constaté qu'il y a un écart entre cette réduction et la réduction du temps de calcul total attendu. Cet écart est dû aux calculs d'interpolation des données de la météo et du calcul de la masse volumique. Pour réduire ces écarts, nous avons proposé des solutions qui consistent à effectuer un pré-traitement de ces calculs en dehors du programme de calcul des trajectoires optimales. Cela devrait réduire l'écart du temps de calcul total et nous permettre d'avoir la réduction du temps de calcul total attendu qui est de 75%.

## CHAPITRE 5

### LA MÉTÉO ET LE CALCUL DES TRAJECTOIRES EN PHASE DE CROISIÈRE

#### 5.1 Introduction

Nous allons présenter une analyse qui montrera l'influence des données météo sur le calcul des trajectoires aériennes. Deux scénarios principaux seront étudiés. Le premier est basé sur l'utilisation des données de prévisions météorologiques obtenues des fichiers en format GRIB (GRIdded Binary). Le deuxième scénario est celui de l'atmosphère standard ISA (International Standard Atmosphere). L'algorithme de calcul des trajectoires fait intervenir les paramètres suivants : la vitesse, la masse, l'altitude et les champs de la météo (température, pression, humidité relative et vitesse des vents).

Les calculs utilisant les données des fichiers GRIB sont en principe différents des calculs qui utilisent les données du modèle atmosphérique ISA. Nous citons quatre différences. D'abord, les valeurs des champs météo du modèle standard ISA, que l'on va détailler à la section 5.2.1, sont calculées en fonction de l'altitude à l'aide des formules de calcul de la pression et de la température du standard ISA. L'humidité relative et les vents sont considérés comme étant nuls. Les données des fichiers GRIB sont des prévisions météorologiques calculées selon le modèle GFS (Global Forecast System). La deuxième différence porte sur les calculs de consommation. On s'attend à ce que le calcul avec les données météorologiques des fichiers GRIB donne en général un meilleur estimé de la consommation réelle, alors que le calcul utilisant les données du modèle standard ISA donne des consommations qui sont en général différentes des consommations réelles. Une autre différence porte sur les profils des trajectoires calculées. Les trajectoires calculées avec les données ISA sont en général différentes des trajectoires calculées avec les données issues des fichiers GRIB. Les trajectoires calculées avec le modèle ISA sont des trajectoires lisses<sup>1</sup> ou régulières. Ces trajectoires sont acceptables pour un vol et un avion pourrait l'emprunter pour suivre un plan de vol basé sur celles-ci. Nous ne connaissons cependant pas de façon précise les trajectoires calculées avec les données des fichiers GRIB puisqu'elles dépendent des données de la météo qui ne sont pas stables. L'avantage d'utiliser les trajectoires calculées avec les fichiers GRIB est la précision des calculs de consommation, alors que l'avantage d'utiliser les données du standard ISA est d'avoir un profil de trajectoire lisse. L'objectif de l'étude que l'on va mener dans ce chapitre est de faire une analyse des trajectoires calculées en

---

1. Trajectoires contenant moins de changements de paliers.

fonction du choix des champs météo : température, pression, humidité relative et vitesse des vents. Plus précisément, nous voulons répondre à la question suivante : quels champs météo des fichiers GRIB ou du modèle ISA donneront des estimations de consommation précises et des trajectoires acceptables pour le vol d'un avion ? Pour répondre à cette question, nous allons introduire, à la section 5.2, le standard ISA et les fichiers GRIB. À la section 5.3, nous allons définir de nouveaux types de météo qui dépendent des choix de champs météo. Ensuite, à la section 5.4, nous allons illustrer des résultats de calcul pour différentes prévisions météorologiques. Pour chacun des types de météo, nous allons comparer les consommations obtenues avec la consommation calculée à l'aide d'une météo de référence (données obtenues complètement des fichiers GRIB). Nous allons aussi comparer les profils verticaux des trajectoires calculées pour les différents types de météo. À la section 5.5, nous ferons une étude comparative des calculs selon les choix des champs météo. Notons que les calculs que nous allons présenter dans ce chapitre portent sur le vol étudié au chapitre 3 (les mêmes caractéristiques de l'avion et les mêmes aéroports de départ et d'arrivée).

## 5.2 Le modèle atmosphérique ISA et la météo issue des fichiers GRIB

### 5.2.1 Le modèle atmosphérique ISA

Le modèle atmosphérique ISA ou le standard ISA décrit les conditions normales de température et de pression qui ne dépendent que de l'altitude. L'humidité relative et les vents sont supposés nuls. Ce standard décrit aussi l'atmosphère normalisée de type OACI (Organisation de l'Aviation Civile Internationale). Nous présentons ci-dessous les formules de calcul de la température  $T_e$  et de la pression  $P$ . Elles sont résumées dans Nuic et al. (2005) et reformulées dans Maazoun (2015). Nous rappelons que la température et la pression permettent de calculer la masse volumique selon l'équation (3.14). Celle-ci représente la base de calcul de la consommation de carburant. Les calculs de  $T_e$  et  $P$  dépendent de la position de l'avion par rapport à la tropopause. L'altitude de la tropopause,  $h_{\text{tropopause}}$ , dépend de la différence de température par rapport à la température ISA au niveau moyen de la mer, donnée par

$$\Delta T_{\text{ISA}} = T_0 - (T_0)_{\text{ISA}}, \quad (5.1)$$

où  $T_0$  est la température ambiante et  $(T_0)_{\text{ISA}} = 288,15 \text{ K}$  est la température ISA au niveau moyen de la mer. L'altitude de la tropopause est donnée par

$$h_{\text{tropopause}} = 11\,000 - \frac{\Delta T_{\text{ISA}}}{k_T}, \quad (5.2)$$

où  $k_T = -0,0065 \text{ (K m}^{-1}\text{)}$  est le gradient de température ISA sous la tropopause.

On peut déterminer la température  $T_e$  et la pression  $P$  en fonction de l'altitude  $h$  comme suit :

- Si  $h < h_{\text{tropopause}}$ , alors

$$T_e = (T_0)_{\text{ISA}} + \Delta T_{\text{ISA}} + k_T h \quad (5.3)$$

et

$$P = (P_0)_{\text{ISA}} \left( \frac{T_e}{(T_0)_{\text{ISA}} + \Delta T_{\text{ISA}}} \right)^{-\frac{g}{k_T R}}, \quad (5.4)$$

où  $(P_0)_{\text{ISA}} = 101\,325$  Pa est la pression ISA au niveau de la mer ;

- Si  $h = h_{\text{tropopause}}$ , alors

$$T_e = T_{\text{tropopause}} = (T_0)_{\text{ISA}} + \Delta T_{\text{ISA}} + k_T h_{\text{tropopause}} = 216,65 \text{ K} \quad (5.5)$$

et

$$P = P_{\text{tropopause}} = (P_0)_{\text{ISA}} \left( \frac{T_{\text{tropopause}}}{(T_0)_{\text{ISA}} + \Delta T_{\text{ISA}}} \right)^{-\frac{g}{k_T R}}; \quad (5.6)$$

- Si  $h > h_{\text{tropopause}}$ , alors

$$T_e = T_{\text{tropopause}} \quad (5.7)$$

et

$$P = P_{\text{tropopause}} e^{-\left(\frac{g}{R T_{\text{tropopause}}}\right) (h - h_{\text{tropopause}})}. \quad (5.8)$$

### 5.2.2 Fichiers GRIB

Les fichiers GRIB sont des fichiers en format compressé qui contiennent les prévisions météorologiques pour toute la planète, pour une durée allant de trois heures jusqu'à une semaine. Le plus important producteur de fichiers GRIB est le NOAA<sup>2</sup> (National Oceanic and Atmospheric Administration). Différents modèles sont utilisés pour générer les fichiers GRIB. Le modèle le plus répandu est le modèle GFS (Global Forecast System) du NOAA. Notons que les fichiers GRIB sont donnés par niveaux de pression. Pour chaque niveau de pression, des numéros de message sont attribués à chacun des champs météo (cf. figure 5.1).

---

2. <http://www.noaa.gov/>

Niveau de pression ↓	N° message Altitude ↓	N° message Température ↓	N° message Humidité relative ↓	N° message Composante Vx ↓	N° message Composante Vy ↓
20 000 Pa	58,0	59,0	60,0	62,0	63,0
25 000 Pa	67,0	68,0	69,0	71,0	72,0
30 000 Pa	76,0	77,0	78,0	80,0	81,0
•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•
100 000 Pa	216,0	208,0	209,0	211,0	212,0

Figure 5.1 Les messages par niveau de pression d'un fichier GRIB.

Dans notre étude, nous nous intéressons aux numéros de message associés aux champs météo suivants : l'altitude géopotentielle, la température, la pression, l'humidité relative et les vents. Grâce à ces messages, les programmes d'encodage et de décodage des fichiers GRIB permettent d'extraire les données de chacun des champs météo en se basant sur leurs numéros de message. La figure 5.1 illustre un exemple où l'on a pour chaque niveau de pression des numéros de message associés aux différents champs météo.

Les fichiers GRIB utilisés dans nos calculs donnent des informations météo sur une grille avec une résolution de 0,5 degré de longitude/latitude, qui rend ces fichiers volumineux et leur utilisation difficile. Comme mentionné précédemment dans le chapitre 3, une grille de nœuds par niveau de pression qui couvre l'espace de vol de l'avion est d'abord créée. Pour avoir les données des champs météo (altitude géopotentielle, température, pression, humidité relative et vitesse de vents) à chacun de ces nœuds, nous utilisons un programme qui fait d'abord le décodage des fichiers GRIB en des fichiers de format CSV (Comma-Separated Values). Puis, à l'aide d'une procédure de lecture de ces fichiers CSV, nous récupérons pour chaque niveau de pression, pour chaque longitude et pour chaque latitude des nœuds de la grille, les valeurs des champs météo. La figure 5.2 illustre la

structure du programme d'extraction (de décodage) et de lecture des champs météo des fichiers GRIB.

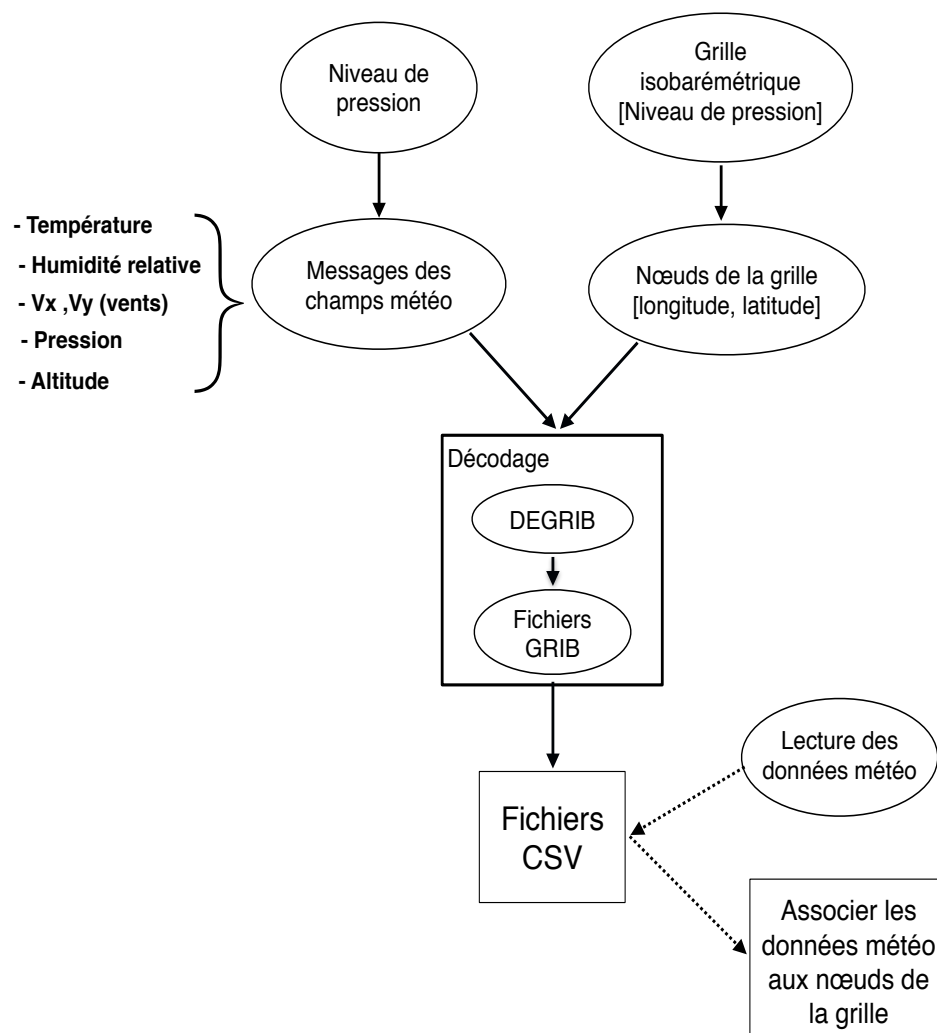


Figure 5.2 Schéma du programme DEGRIB .

Une fois que les données météo sont transférées sur la grille par niveau de pression, ou grille NISB (Niveau ISOBarométrique), une procédure d'interpolation de ces données est effectuée pour associer les valeurs météo aux nœuds de la grille de calcul. C'est sur cette grille que nos calculs de trajectoires sont effectués. Avant de lancer les calculs, des interpolations en temps sont nécessaires pour déterminer les données météo aux nœuds selon les temps de passage du vol. À la section suivante, nous allons définir les différents types de météo que nous allons utiliser pour le calcul des trajectoires.

### 5.3 Définition de nouveaux types de météo

Le standard ISA et la météo issue des fichiers GRIB représentent les sources d'information à la base des nouveaux types de météo que nous allons définir. Les champs météo que l'on retrouve dans les fichiers GRIB sont nombreux. On n'en a besoin que de quelques-uns, à savoir la température ( $T$ ), la pression ( $P$ ), l'humidité relative ( $HR$ ) et les composantes horizontales  $V_x$  et verticales  $V_y$  de la vitesse du vent. Au tableau 5.1, nous énumérons les cinq types de météo que l'on va analyser dans ce chapitre. D'abord, nous citons le type Météo-Complète qui est la météo de référence définie précédemment. En plus de ce type, nous définissons trois nouveaux types de météo, qui dépendent des champs météo utilisés. Le premier type utilise les données de la météo pour tous les champs sauf l'humidité relative. On le note Météo- $HR$ . Le deuxième type, noté Météo- $HR$ - $P$ , ne tient compte ni de l'humidité relative ni de la pression, alors que pour le type ISA+Vents, on tient compte seulement des vents. Nous ajoutons à ces types de météo le type ISA qui utilise les données du modèle ISA pour tous les champs. Le tableau 5.1 illustre ces différents types de météo.

Tableau 5.1 Les types de météo utilisés pour les calculs.

Type de Météo	ISA (International Standard Atmosphere)	GRIB (Gridded Binary)
Météo-Complète (référence)		$T$ (Température), $P$ (Pression), $HR$ (Humidité relative), $V_x$ , $V_y$ (Composantes des vents)
Météo- $HR$	$HR=0$	$T$ , $P$ , $V_x$ , $V_y$
Météo- $HR$ - $P$	$HR=0$ $P$	$T$ , $V_x$ , $V_y$
ISA+Vents	$HR=0$ $T$ , $P$	$V_x$ , $V_y$
ISA	$HR=0$ , $V_x=0$ , $V_y=0$ $T$ , $P$	

### 5.4 Présentation des calculs en utilisant les différents types de météo

Nous avons calculé les consommations de carburant en utilisant 10 prévisions météorologiques associées à différentes dates. Au tableau 5.2, nous donnons les consommations, les temps de vol et les écarts de consommation. Ces écarts sont calculés par rapport au type de météo Météo-Complète (référence).



Tableau 5.2 Calculs de consommation avec les différents types de météo.

	Types de météo	Consommation (kg)	Temps de vol (s)	Écart de consommation par rapport à la Météo-Complète (kg)	Écart (%)
Prévision 1	Météo-Complète	28 136,57	20 606,20		
	Météo- <i>HR</i>	28 158,49	20 606,74	21,92	0,08
	Météo- <i>HR-P</i>	28 503,48	20 765,28	366,92	1,30
	ISA+Vents	28 860,53	21 042,03	723,96	2,57
	ISA	31 215,15	22 461,38	3 078,58	10,94
Prévision 2	Météo-Complète	27 748,24	20 950,82		
	Météo- <i>HR</i>	28 779,14	20 994,44	1 030,90	3,72
	Météo- <i>HR-P</i>	29 133,04	21 127,53	1 384,80	4,99
	ISA+Vents	29 339,20	21 284,84	1 590,96	5,73
	ISA	31 215,15	22 461,38	3 466,91	8,46
Prévision 3	Météo-Complète	27 359,04	20 147,49		
	Météo- <i>HR</i>	27 379,52	20 168,62	20,48	0,07
	Météo- <i>HR-P</i>	28 094,79	20 441,15	735,75	2,69
	ISA+Vents	28 489,30	20 747,91	1 130,26	4,13
	ISA	31 215,15	22 461,38	3 856,11	14,01
Prévision 4	Météo-Complète	27 840,85	20 310,27		
	Météo- <i>HR</i>	27 903,16	20 368,38	62,31	0,22
	Météo- <i>HR-P</i>	28 686,55	20 749,83	845,70	3,04
	ISA+Vents	28 990,92	20 946,95	1 150,07	4,13
	ISA	31 215,15	22 461,38	3 374,30	11,87
Prévision 5	Météo-Complète	29 301,42	21 282,46		
	Météo- <i>HR</i>	29 327,66	21 350,76	26,24	0,09
	Météo- <i>HR-P</i>	29 835,19	21 443,28	533,77	1,82
	ISA+Vents	30 121,13	21 625,85	819,71	2,80
	ISA	31 215,15	22 461,38	1 913,73	6,44
Prévision 6	Météo-Complète	29 520,60	21 248,62		
	Météo- <i>HR</i>	29 613,53	21 300,76	92,93	0,31
	Météo- <i>HR-P</i>	30 467,30	21 443,28	946,70	3,21
	ISA+Vents	30 767,62	21 625,85	1 247,02	3,91
	ISA	31 215,15	22 461,38	1 694,55	5,41

Tableau 5.3 Calculs de consommation avec les différents types de météo.

	Types de météo	Consommation (kg)	Temps de vol (s)	Écart de consommation par rapport à la Météo-Complète (kg)	Écart (%)
Prévision 7	Météo-Complète	29 188,01	21 248,62		
	Météo- <i>HR</i>	29 255,06	21 300,76	67,05	0,23
	Météo- <i>HR-P</i>	29 586,23	21 443,28	398,22	1,36
	ISA+Vents	29 797,54	21 625,85	609,53	2,09
	ISA	31 215,15	22 461,38	2 027,14	6,70
Prévision 8	Météo-Complète	27 796,55	21 248,62		
	Météo- <i>HR</i>	27 890,17	21 300,76	93,62	0,34
	Météo- <i>HR-P</i>	28 269,51	21 443,28	472,96	1,70
	ISA+Vents	28 296,97	21 625,85	500,42	1,80
	ISA	31 215,15	22 461,38	3 418,60	11,92
Prévision 9	Météo-Complète	28 868,17	21 235,35		
	Météo- <i>HR</i>	28 667,51	21 426,16	−200,66	−0,69
	Météo- <i>HR-P</i>	29 233,54	21 270,74	365,37	1,27
	ISA+Vents	29 405,05	21 414,54	536,88	1,86
	ISA	31 215,15	22 461,38	2 346,98	8,89
Prévision 10	Météo-Complète	26 925,31	20 282,95		
	Météo- <i>HR</i>	26 856,90	20 387,77	−68,41	−0,25
	Météo- <i>HR-P</i>	27 453,49	20 720,49	528,18	1,96
	ISA+Vents	27 608,64	20 727,15	683,33	2,54
	ISA	31 215,15	22 461,38	4 289,84	15,93

D'après les données des tableaux 5.2 et 5.3, nous observons des écarts de consommation qui sont plus au moins importants pour les différents types de météo. Les grands écarts qui représentent les pires cas sont en gris. Pour toutes les prévisions, sauf pour la prévision météorologique 9, nous avons des écarts en pourcentage inférieurs à 1% (moins de 100 kg d'écart par rapport au type de météo de référence) dans le cas où l'on utilise les valeurs de l'humidité relative de l'atmosphère ISA, i.e. pour le type de météo Météo-*HR*. Lorsqu'on utilise les prévisions 1, 5, 7, 8 et 10, des écarts de consommation par rapport à la météo de référence est autour de 500 kg, i.e. un pourcentage d'écart entre 1% et 2% pour le type Météo-*HR-P*. Les prévisions 8 et 9 sont les seules qui donnent un pourcentage d'écart de consommation entre 1% et 2% dans le cas où l'on utilise le type de

météo ISA+Vents, i.e. lorsqu'on ne tient pas compte des données météo pour les champs d'humidité relative, de pression et de température. Tous les autres cas sont en gris et représentent les pires cas où les écarts de consommation sont plus importants (avec un pourcentage d'écart supérieur à 2%).

Comme mentionné précédemment, notre objectif est de trouver une stratégie de calcul qui est aussi précise qu'un calcul qui utilise toutes les données météo, et qui donne des trajectoires de vol qui ressemblent aux trajectoires obtenues avec les données du modèle ISA. Pour ce faire, nous procédons par élimination. Nous commençons par le type de météo qui donne un calcul précis, i.e. un calcul dont l'écart de consommation par rapport au type de Météo-Complète est petit, mais dont la trajectoire calculée n'est pas assez lisse. Puis on passe à un deuxième type de météo dont le calcul donne un écart de consommation plus grand que le premier type, mais dont la trajectoire obtenue est plus lisse que la première trajectoire, sinon on recommence le même procédé pour le troisième et le quatrième type. Dans ce qui suit, nous allons présenter les résultats de ces calculs en utilisant deux différentes prévisions météorologiques. Nous allons montrer qu'avec ces deux prévisions, le choix des données du standard ISA ou des données météo est parfois difficile à faire.

### Prévision 1

Selon les résultats du tableau 5.4, l'écart de consommation est de 78 g pour le type de météo Météo-*HR* alors que cet écart est autour de 1 kg pour le type Météo-*HR-P*. A priori, ces deux types présentent des écarts de consommation acceptables. Pour pouvoir faire le choix entre les deux, nous allons comparer les profils verticaux de la trajectoire calculée.

Tableau 5.4 Les écarts de consommation calculés avec la prévision 1.

	Type de météo	Consommation (kg)	Écart (kg)	Écart (%)
Prévision 1	Météo-Complète	28 136,57		
	Météo- <i>HR</i>	28 158,49	21,92	0,08
	Météo- <i>HR-P</i>	28 503,48	366,92	1,30
	ISA+Vents	28 860,53	723,96	2,57
	ISA	31 215,15	3 078,58	10,94

La figure 5.3 illustre les profils verticaux des trajectoires calculées pour chaque type de météo. Nous constatons qu'avec le type Météo-Complète et le type Météo-*HR*, les profils verticaux des trajectoires calculées ne sont pas lisses. Par contre, les profils verticaux des trajectoires calculées avec le type Météo-*HR-P* et avec le type ISA+Vents sont assez lisses et n'oscillent pas, sauf que

d'après le tableau 5.4, l'écart de consommation obtenu avec le calcul utilisant le type ISA+Vents est plus grand que l'écart donné avec le calcul utilisant le type Météo-*HR-P*, soit 723 kg (2,57% d'écart) pour le type ISA+Vents contre 366,92 kg (1,3%) pour le type Météo-*HR-P*. On conclut que l'on peut faire les calculs pour la prévision 1 avec le type Météo-*HR-P*, puisque son écart est le plus petit et que la trajectoire calculée est la plus lisse, i.e. comportant le moins de changements de paliers.

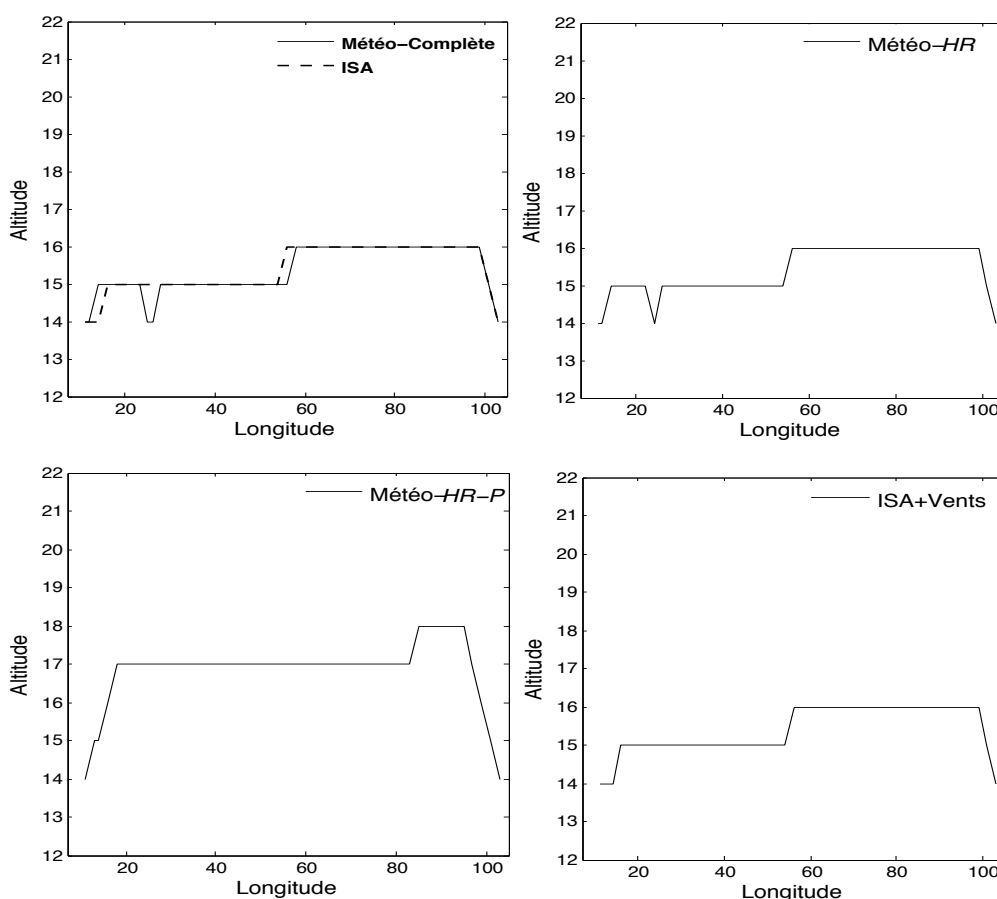


Figure 5.3 Profils verticaux des trajectoires calculées avec la prévision 1.

## Prévision 2

D'après la figure 5.4, nous constatons que le calcul avec le type Météo-Complète pour cette prévision donne une trajectoire qui est lisse, alors qu'avec le type météo-*HR* et le type météo-*HR-P*, nous obtenons cette fois-ci des trajectoires non lisses. Puisque les seuls cas où la trajectoire calculée est lisse sont le cas du type ISA+Vents et le cas du type Météo-Complète, nous comparons les consommations calculées avec ces deux types de météo. Selon le tableau 5.5, le calcul avec le type

ISA+Vents donne un grand écart de consommation par rapport à la consommation calculée avec le type Météo-Complète. Dans ce cas, nous pouvons choisir les champs météo qui proviennent du type Météo-Complète.

Tableau 5.5 Les écarts de consommation calculés avec la prévision 2.

	Types de météo	Consommation (kg)	Écart (kg)	Écart (%)
Prévision 2	Météo-Complète	27 748,24		
	Météo-HR	28 779,14	1 030,90	3,72
	Météo-HR-P	29 133,04	1 384,80	4,99
	ISA+Vents	29 339,20	1 590,96	5,73
	ISA	31 215,15	3 466,91	8,46

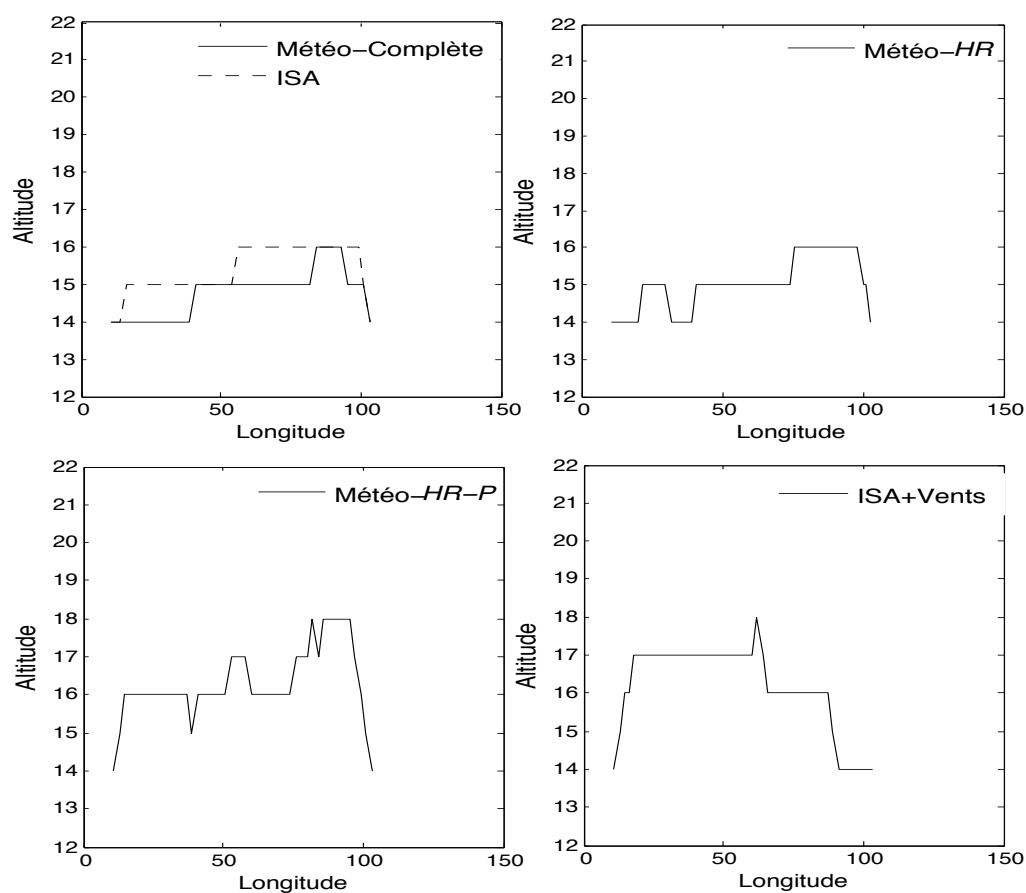


Figure 5.4 Profils verticaux des trajectoires calculées avec la prévision 2.

## 5.5 Étude comparative des calculs selon le choix des champs météo

Dans cette partie, nous allons présenter une étude sur le choix des champs  $HR$ ,  $P$ ,  $T$  et des composantes de vent ( $V_x$  et  $V_y$ ) dont les données peuvent provenir des fichiers de prévisions météorologiques (fichiers GRIB) ou du modèle ISA. Nous voulons proposer des choix qui donnent des calculs assez précis et des trajectoires réalistes (qu'un avion peut emprunter). Plus précisément, nous voulons savoir si on peut négliger des champs qui proviennent des fichiers GRIB et utiliser les données ISA. Nous allons d'abord étudier le choix du champ d'humidité relative.

### 5.5.1 Choix du champ de l'humidité relative dans les calculs de trajectoires

L'étude du choix de l'humidité relative ( $HR$ ) doit répondre à la question suivante : serait-il préférable d'utiliser le calcul qui tient compte de l'humidité relative ou d'utiliser le calcul qui n'en tient pas compte ? Pour cela, nous proposons d'effectuer deux calculs (calculs 1 et 2). Nous effectuons ces deux calculs sur des trajectoires différentes, mais en utilisant le même type de météo, soit le type Météo-Complète. À la figure 5.5, nous illustrons les trajectoires des deux calculs ainsi que le type de météo utilisé. Au tableau 5.6, nous donnons les consommations et les temps de vol obtenus avec chacun des calculs. Nous faisons une première comparaison (comparaison 1) des résultats en déterminant les écarts de consommation et les écart de temps de vol. Pour une deuxième comparaison (comparaison 2), nous allons refaire les calculs 1 et 2 qu'on illustre à la figure 5.6. Nous choisissons la même trajectoire et des types de météo différents. Nous utilisons le type Météo-Complète pour le calcul 1 et le type Météo- $HR$  pour le calcul 2. Pour ce dernier type, nous ne tenons pas compte de l'humidité relative.

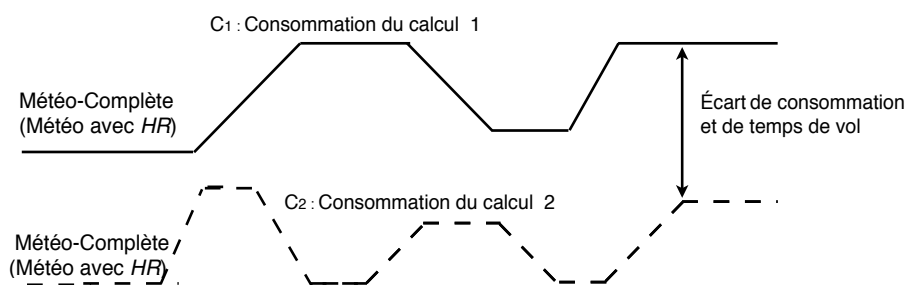


Figure 5.5 Comparaison 1 des calculs 1 et 2 avec l'humidité relative.

Nous donnons également au tableau 5.6 les consommations, les temps de vol ainsi que les écarts obtenus. Nous constatons que pour 70% des prévisions considérées, les écarts de consommation et de temps de vol obtenus avec les calculs effectués sur des trajectoires différentes sont plus grands

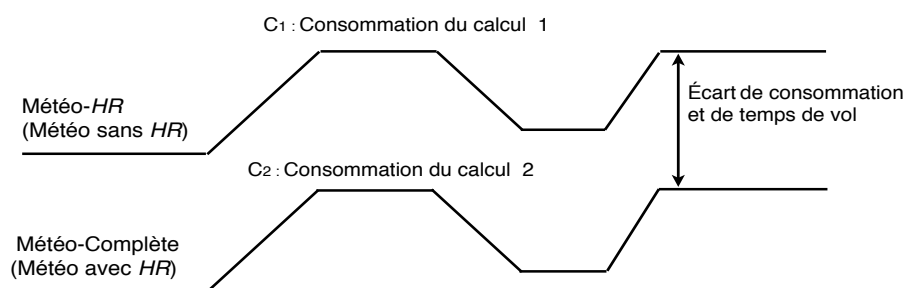


Figure 5.6 Comparaison 2 des calculs 1 et 2 avec l'humidité relative.

Tableau 5.6 Les écarts de consommation et de temps de vol pour le cas de l'humidité relative.

Prévision	Comparaison	Calcul 1		Calcul 2		Écarts des calculs 1 et 2	
		Consommation $C_1$ (kg)	Temps $t_1$ (s)	Consommation $C_2$ (kg)	Temps $t_2$ (s)	$ C_1 - C_2 $ (kg)	$ t_1 - t_2 $ (s)
1	1	28 161,16	20 610,73	27 789,75	19 924,70	371,40	686,03
	2			27 807,03	19 924,20	354,13	686,53
2	1	28 795,95	21 002,78	28 431,26	20 327,04	364,69	675,74
	2			28 076,81	20 114,43	719,14	888,35
3	1	27 376,83	20 170,94	26 662,52	19 303,52	714,31	867,42
	2			26 666,48	19 296,56	710,35	874,38
4	1	27 897,95	20 409,87	27 516,16	19 666,49	381,79	743,38
	2			27 168,25	19 484,32	729,70	925,55
5	1	29 333,19	21 348,89	28 580,80	20 376,27	752,39	972,62
	2			28 588,07	20 369,42	745,12	979,47
6	1	29 610,33	21 262,05	28 331,40	20 203,34	1 278,93	1 058,71
	2			28 899,65	20 177,07	710,68	1 084,98
7	1	29 221,06	21 270,90	28 848,87	20 579,10	372,19	691,8
	2			28 856,43	20 582,43	364,63	688,47
8	1	27 897,67	21 336,84	27 941,40	20 219,31	43,73	1 117,53
	2			27 506,39	20 837,18	391,28	499,66
9	1	28 948,04	21 242,15	27 632,16	22 230,15	1 315,88	988,00
	2			28 185,99	21 254,77	762,05	12,62
10	1	27 254,24	20 068,03	26 498,98	19 320,69	755,26	747,34
	2			26 496,81	19 322,79	757,43	745,24

ou proches des écarts de calcul obtenus lorsqu'on effectue les calculs sur des trajectoires identiques et avec des types de météo différents. Ceci nous permet de changer le type de météo plutôt que changer de trajectoire. Nous choisissons le type de météo qui ne tient pas compte de l'humidité relative. Dans notre cas, nous proposons de faire le calcul avec le type Météo-*HR* au lieu de le faire avec le type Météo-Complète. Nous choisirons donc l'humidité relative du modèle ISA qui est égale à 0 au lieu de choisir l'humidité relative issue de la météo.

### 5.5.2 Choix du champ de pression dans les calculs de trajectoires

Pour le choix du champ de la pression ( $P$ ), nous proposons de refaire les calculs 1 et 2 de la sous-section 5.5.1 (cf. figure 5.7). Cette fois-ci, nous effectuons ces calculs sur des trajectoires différentes en utilisant le type de météo Météo-*HR* qui consiste à tenir compte de la pression. Nous faisons la comparaison 1 des deux calculs en déterminant les écarts de consommation et de temps de vol. Nous donnons ces écarts au tableau 5.7. Ensuite, nous calculons les écarts de consommation et de temps de vol entre deux nouveaux calculs 1 et 2 qu'on illustre à la figure 5.8. Nous effectuons ces calculs sur la même trajectoire mais en choisissant des types de météo différents (comparaison 2).

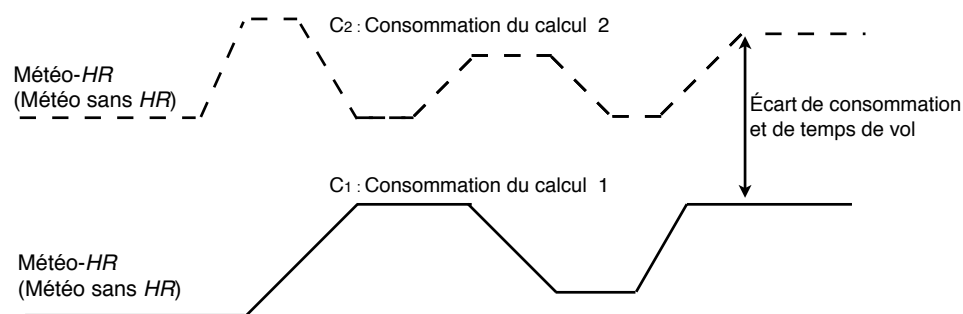


Figure 5.7 Comparaison 1 des calculs 1 et 2 pour la pression.

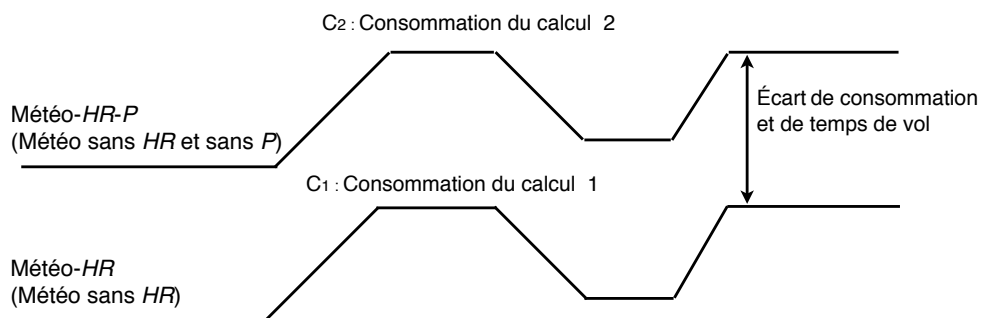


Figure 5.8 Comparaison 2 des calculs 1 et 2 pour la pression.



Tableau 5.7 Les écarts de consommation et de temps de vol pour le cas du choix de la pression.

Prévision	Comparaison	Calcul 1		Calcul 2		Écarts des calculs 1 et 2	
		Consommation $C_1$ (kg)	Temps $t_1$ (s)	Consommation $C_2$ (kg)	Temps $t_2$ (s)	$ C_1 - C_2 $ (kg)	$ t_1 - t_2 $ (s)
1	1	28 568,09	20 739,17	27 992,40	20 180,92	828,92	558,25
	2			27 822,24	19 820,49	745,85	918,68
2	1	29 229,48	21 158,62	28 391,51	20 298,70	837,97	859,92
	2			28 375,65	20 215,46	853,83	943,16
3	1	27 820,88	20 310,65	26 921,47	19 646,45	899,41	661,20
	2			27 448,75	20 310,65	372,13	0,00
4	1	28 648,45	20 758,75	27 648,14	19 795,47	1 000,31	963,28
	2			27 969,91	19 796,46	678,54	962,29
5	1	29 959,81	21 562,80	28 944,50	20 617,73	1 015,31	945,07
	2			29 131,74	20 575,89	828,07	986,91
6	1	30 316,79	21 666,55	29 515,71	20 868,24	801,08	798,31
	2			29 840,21	20 726,16	476,58	940,39
7	1	29 610,79	21 435,90	28 722,80	20 711,34	887,99	724,56
	2			28 773,32	20 469,30	837,47	966,6
8	1	28 390,38	21 215,50	27 286,68	22 052,48	1 103,70	836,98
	2			27 100,67	20 108,33	1 289,71	1 107,17
9	1	29 283,56	21 271,04	28 599,60	20 421,12	683,96	849,92
	2			28 457,52	20 320,46	826,04	950,58
10	1	28 029,41	20 807,57	26 854,89	19 469,40	1 174,52	1 338,17
	2			27 316,81	19 641,47	712,6	1 166,10

Selon les données du tableau 5.7, nous constatons que pour 70% des prévisions météorologiques, les écarts de consommation dans le cas où l'on fixe le type de météo et où on fait varier la trajectoire sont plus grands que les écarts de consommation calculés lorsqu'on fixe la trajectoire et lorsqu'on fait varier le type de météo. Pour ce qui est des temps de vol, nous remarquons le contraire. Ceci est dû principalement aux différentes trajectoires considérées dans ces comparaisons. D'autre part, dans notre étude, nous ne tenons pas compte du coût associé au temps. Pour cette raison et en utilisant le même raisonnement que celui présenté dans le cas de l'étude sur l'humidité relative, nous proposons de changer le type de météo. Ceci est équivalent à choisir un type de météo qui ne tient pas compte de la pression issue des prévisions météorologiques. Plus précisément, nous proposons de faire les calculs avec le type de météo

Météo-*HR-P* où on utilise la pression calculée avec le modèle ISA.

Dans le cas où on ne tient pas compte de l'humidité relative et de la pression provenant de la météo, nous proposons à la sous-section suivante d'étudier le champ de température.

### 5.5.3 Choix du champ de température dans les calculs de trajectoires

Nous suivons la même démarche qui a été faite pour le choix des champs d'humidité relative et de pression. Nous faisons une première comparaison (comparaison 1) entre un calcul 1 et un calcul 2 qu'on effectue sur des trajectoires différentes (cf. figure 5.9). Les deux calculs sont effectués avec le même type de météo Météo-*HR-P* où les données de la température et de la vitesse du vent sont issues des prévisions météorologiques. Par contre, l'humidité relative et la pression sont données selon le modèle ISA. Nous répétons les calculs 1 et 2 pour une deuxième comparaison (comparaison 2). Ces calculs sont effectués sur des trajectoires identiques en choisissant différents types de météo (cf. figure 5.9). Nous déterminons ensuite les écarts de consommation et les écarts de temps de vol pour les comparaisons 1 et 2. Nous donnons les consommations et les temps de vol ainsi que leurs écarts au tableau 5.8.

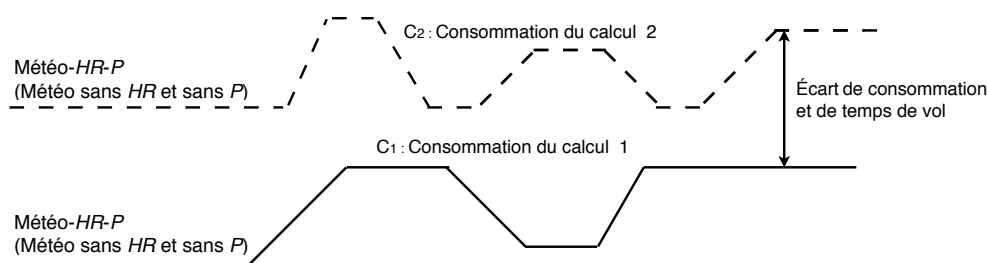


Figure 5.9 Comparaison 1 des calculs 1 et 2 pour la température.

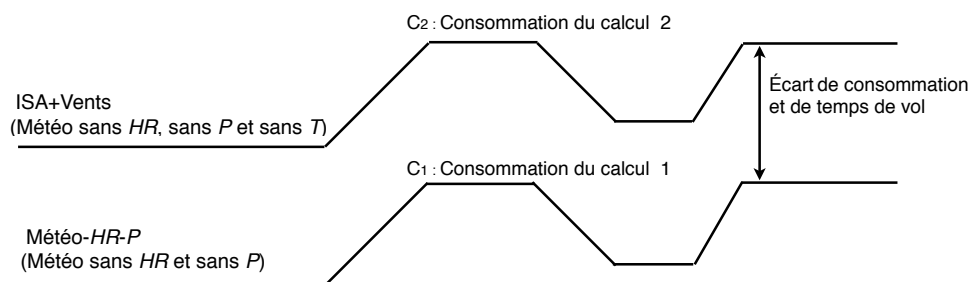


Figure 5.10 Comparaison 2 des calculs 1 et 2 pour la température.

Selon les résultats du tableau 5.8, nous constatons que pour 90% des prévisions météorologiques, les écarts de consommation calculés sur des trajectoires différentes et en gardant

le même type de météo (comparaison 1) sont plus petits que les écarts obtenus lorsqu'on fait les calculs sur des trajectoires identiques et en changeant le type de météo (comparaison 2). Le choix de ne pas faire varier le type de météo nous a donné des écarts réduits par rapport au choix où on le fait varier. Ceci semble montrer que le maintien du type de météo qui tient compte de la température provenant des fichiers météo est le bon choix, puisque nous obtenons des calculs précis dans ce cas. Comme mentionné précédemment, le coût relié au temps n'est pas pris en considération puisque nous le négligeons pour cette étude. Lorsqu'on décidera d'intégrer ce coût, le raisonnement que nous venons de faire reste valide et les résultats sur le choix des champs de météo dépendront des valeurs du coût du temps.

Tableau 5.8 Les écarts de consommation et de temps de vol pour le cas du choix de la température.

Prévision	Comparaison	Calcul 1		Calcul 2		Écarts des calculs 1 et 2	
		Consommation C <sub>1</sub> (kg)	Temps t <sub>1</sub> (s)	Consommation C <sub>2</sub> (kg)	Temps t <sub>2</sub> (s)	C <sub>1</sub> -C <sub>2</sub>   (kg)	t <sub>1</sub> -t <sub>2</sub>   (s)
1	1	28 604,68	20 878,89	28 096,92	19 871,36	507,76	1 007,53
	2			27 945,88	19 959,84	658,80	919,05
2	1	29 179,04	21 228,68	28 460,51	20 144,16	718,53	1 084,52
	2			28 768,97	20 514,92	410,07	713,76
3	1	28 047,54	20 559,11	27 846,55	19 898,20	200,99	660,91
	2			27 643,68	20 053,99	403,86	505,12
4	1	28 745,28	20 858,17	28 359,24	20 749,83	350,04	108,34
	2			28 098,53	20 249,45	646,75	500,38
5	1	29 870,13	21 644,11	29 301,32	20 394,13	568,81	1 249,98
	2			29 033,44	20 572,18	836,69	1 071,93
6	1	30 362,59	21 768,20	30 077,86	20 676,06	284,73	1 092,14
	2			29 312,12	20 683,93	1 050,47	1 084,27
7	1	29 712,24	21 612,04	29 464,91	20 672,72	247,33	939,32
	2			29 241,26	21 015,54	470,98	596,50
8	1	28 665,80	21 283,33	28 776,85	20 303,99	111,05	979,34
	2			26 841,29	21 884,72	1 824,51	601,39
9	1	29 214,74	22 110,73	28 724,71	20 200,25	490,03	1 910,48
	2			28 050,25	22 455,13	1 164,49	344,40
10	1	28 565,90	20 750,36	27 733,61	19 773,33	832,29	977,03
	2			27 637,33	19 965,01	928,57	785,35

Par la suite, nous allons analyser les profils verticaux des trajectoires obtenues avec le calcul qui tient compte de la température de la météo.

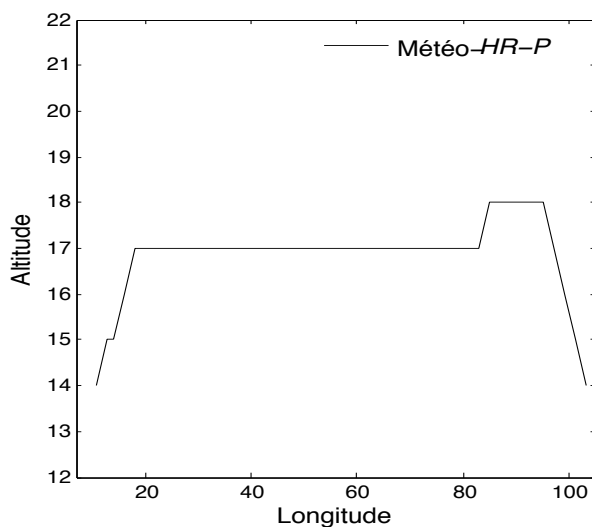


Figure 5.11 Profil vertical d'une trajectoire lisse.

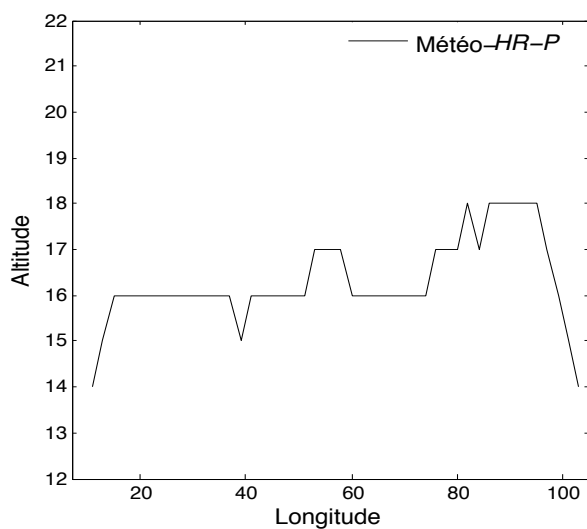


Figure 5.12 Profil vertical d'une trajectoire non lisse.

Nous illustrons à la figure 5.11 le cas d'une trajectoire lisse (régulière) et à la figure 5.12 le cas d'une trajectoire non lisse. Avec ce calcul, nous avons trouvé que 50% des prévisions météorologiques correspondent au cas où la trajectoire obtenue est lisse alors que dans les autres cas, la trajectoire est non lisse. Nous allons proposer deux solutions. La première solution consiste à tenir compte de la température de la météo et dans ce cas nous finissons cette étude en choisissant le type *Météo-HR-P* pour le calcul, i.e. nous prenons en considération les données de

la température et des vents de la météo. Pour les trajectoires non lisses, nous proposons effectuer un lissage pour les rendre plus lisses. La deuxième solution consiste à ne pas tenir compte de la température de la météo, i.e. nous utilisons la température du modèle ISA. Si l'on choisit la deuxième solution, nous poursuivrons à la sous-section suivante notre étude sur le choix du vent.

#### 5.5.4 Choix du champ des vents dans les calculs de trajectoires

Pour le choix des vents, nous répétons les mêmes scénarios de comparaison qu'on a présentés pour les choix des champs d'humidité relative, de pression et de température. La première comparaison concerne les calculs 1 et 2 qui sont effectués avec le même type de météo ISA+Vents mais sur des trajectoires différentes (cf. figure 5.13). La deuxième comparaison concerne les deux calculs qui se font sur des trajectoires identiques, mais avec des types de météo différents. On choisit le type de météo ISA+Vents pour le calcul 1 et le type ISA pour le calcul 2 (cf. figure 5.14). Au tableau 5.9, nous donnons aussi les écarts entre le calcul 1 et le calcul 2 pour les deux scénarios de comparaison. Selon le tableau, nous constatons que pour toutes les prévisions météorologiques considérées, les écarts de consommation calculés sur des trajectoires différentes et avec le même type de météo (comparaison 1) sont plus grands que les écarts obtenus lorsqu'on fait les calculs sur des trajectoires identiques et en utilisant différents types de météo (comparaison 2). Le choix de faire varier le type de météo nous a donné des écarts réduits par rapport au choix où on le garde fixe. Faire changer le type de météo semble donc le meilleur choix. Dans notre cas, ceci est équivalent à choisir le type de météo qui ne tient pas compte des vents de la météo, i.e. le type ISA est le choix proposé pour le calcul. En ce qui concerne le profil vertical de la trajectoire qu'on obtient avec le type ISA, nous constatons qu'avec ce type, les trajectoires calculées sont lisses pour toutes les prévisions météorologiques. Nous concluons que lorsqu'on ne tient pas compte de la température de la météo, l'étude des vents nous mènera à choisir le type ISA pour le calcul, alors que lorsqu'on a pris en considération la température de la météo, le choix des vents de la météo était le bon.

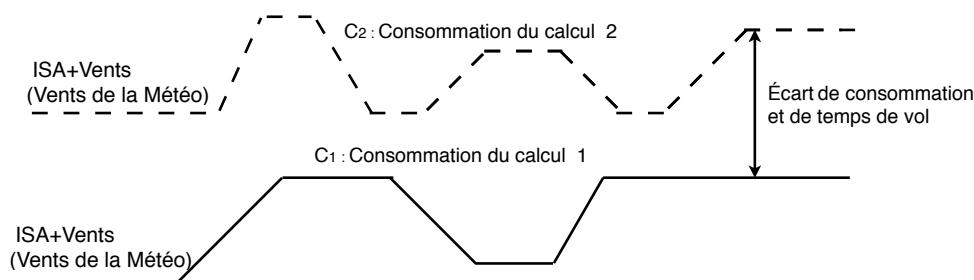


Figure 5.13 Comparaison 1 des calculs 1 et 2 pour les vents.

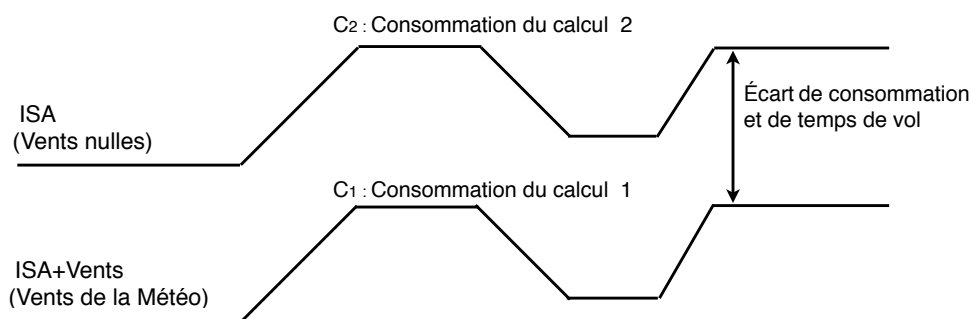


Figure 5.14 Comparaison 2 des calculs 1 et 2 pour les vents.

Tableau 5.9 Les écarts de consommation et de temps de vol pour le cas du choix du vent.

Prévision	Comparaison	Calcul 1		Calcul 2		Écarts des calculs 1 et 2	
		Consommation $C_1$ (kg)	Temps $t_1$ (s)	Consommation $C_2$ (kg)	Temps $t_2$ (s)	$ C_1 - C_2 $ (kg)	$ t_1 - t_2 $ (s)
1	1	31 744,12	22 747,66	28 237,72	20 135,62	3 506,40	2 612,04
	2			30 827,60	21 739,28	916,52	1 008,58
2	1	32 463,82	23 153,03	28 785,85	20 473,41	3 677,97	2 679,62
	2			30 862,20	21 746,70	1 601,62	1 406,33
3	1	31 842,09	22 779,39	27 639,99	19 760,52	4 202,10	3 018,87
	2			30 845,39	21 963,30	996,70	816,09
4	1	32 870,61	23 422,05	28 002,24	19 995,96	4 868,56	1 693,09
	2			30 858,84	21 728,28	2 011,77	1 693,77
5	1	32 617,49	23 300,10	29 318,53	20 805,34	3 298,96	2 494,76
	2			30 752,91	21 658,18	1 854,58	1 641,92
6	1	33 846,89	23 932,64	30 094,36	21 269,73	3 752,53	2 662,91
	2			30 945,62	21 606,96	2 901,27	2 325,68
7	1	32 227,67	23 012,80	29 218,78	20 745,64	3 008,89	2 267,16
	2			30 840,32	21 716,64	1 387,35	1 296,16
8	1	32 039,46	22 946,43	28 860,38	20 514,37	3 179,08	2 432,06
	2			30 808,65	21 756,16	1 230,81	1 190,27
9	1	32 484,93	23 101,41	29 079,56	20 656,29	3 405,37	2 445,12
	2			30 924,08	21 700,72	1 560,85	1 400,65
10	1	32 413,90	23 004,86	28 059,97	20 031,25	3 353,86	2 973,61
	2			30 608,53	21 729,01	1 705,30	1 275,85

## 5.6 Conclusion

Nous avons présenté de nouveaux types de météo avec lesquels nous avons effectué différents calculs de trajectoires en utilisant différents fichiers de prévisions météorologiques afin de connaître l'impact des changements de types de météo sur les calculs. Les résultats obtenus montrent que les calculs qui utilisent plus de données du modèle ISA sont moins précis et donnent des trajectoires qui ressemblent plus, en général, aux trajectoires lisses, alors que les calculs qui utilisent plutôt les données issues des fichiers GRIB sont plus précis et donnent des trajectoires non lisses, i.e. plus nous tenons compte des données météo pour les divers champs, moins les trajectoires sont lisses. Pour bien étudier l'effet du choix des champs météo sur les calculs de consommation des trajectoires toujours en choisissant les mêmes prévisions météorologiques, nous avons comparé différents scénarios de météo en faisant varier deux paramètres. Le premier paramètre concerne le choix du type de météo et le deuxième concerne le choix de la trajectoire. Les résultats des calculs de consommation et de temps de vol montrent qu'on peut utiliser les données du modèle ISA pour les champs de l'humidité relative et de la pression. Pour le choix des champs de la température et des vents, nous avons proposé deux solutions. La première solution consiste à tenir compte de la température et des vents de la météo. Cette solution nous permet d'avoir un calcul plus précis, mais le profil vertical de la trajectoire calculée n'est pas assurément lisse. Pour cela, un lissage de la trajectoire serait nécessaire pour avoir une trajectoire acceptable. La deuxième solution qu'on a proposée consiste à ne pas prendre en considération la température et les vents de la météo. Dans ce cas, le type ISA est proposé pour le calcul. Les trajectoires obtenues avec ISA pour les calculs qu'on a effectués sont lisses, mais le calcul n'est pas précis.

## CHAPITRE 6

### CONCLUSION

Le travail de recherche que nous avons présenté dans ce mémoire de maîtrise propose des techniques de calcul de trajectoires aériennes pour la mise à jour de plans de vol. Les calculs ont été faits sur la phase de croisière en optimisant sur la base les coûts reliés au carburant consommé et sans prendre en considération des coûts reliés au temps.

#### 6.1 Synthèse des travaux

Les calculs de trajectoires que nous avons présentés à la première partie sont basés sur les équations du modèle d'énergie totale et du modèle aérodynamique existantes dans le document de Nuic (2010). Nous avons utilisé le système d'équations différentielles qui nous permet de calculer les coûts de consommation sur la phase de croisière. Pour la mise à jour des plans de vol, le calcul est effectué à partir d'une masse connue pour déterminer à la fin le coût de la trajectoire à suivre. Ce calcul se fait dans le même sens que le vol et ne tient pas compte des données issues des prévisions météorologiques. Plus précisément, les données de l'humidité relative, de la pression, de la température et des vents sont calculées selon le modèle atmosphérique ISA (International Standard Atmosphere). Nous avons comparé les résultats de cette méthode de calcul avec la méthode à rebours présentée par Maazoun (2015). Cette comparaison a permis de valider les résultats des deux calculs et d'expliquer la provenance des écarts dans les résultats obtenus par les deux méthodes. Au chapitre 4, nous avons présenté une amélioration des calculs sur la phase de croisière en proposant des stratégies de discrétisation qui donnent des résultats précis par rapport à une certaine tolérance et qui s'effectuent avec un temps réduit. Au chapitre 5, nous avons proposé une analyse des calculs en tenant compte des données des prévisions météorologiques. Nous avons défini différents types de météo pour avoir différents scénarios d'utilisation des données météorologiques pour les champs de l'humidité relative, de la pression, de la température et des vents. Le but de cette étude est de réduire les erreurs de calcul dues au manque de précision du modèle ISA. Cette nouvelle modélisation peut donner des trajectoires qui sont souvent non lisses. Pour cette raison, nous avons proposé différents types de météo afin de déterminer les champs météo qui devront être pris en compte dans les fichiers de prévisions météorologiques, ou du modèle ISA tout en ayant des trajectoires comportant le moins d'irrégularités.



## **6.2 Limitations de la solution proposée**

La méthodologie de calcul pour la mise à jour des plans de vol que nous avons présentée se limite à la phase de croisière. Cette phase constitue la plus grande partie du vol. Ce travail de recherche n'intègre pas les calculs effectués sur les phases d'ascension initiale et de descente finale. Les calculs sur ces deux phases ont été présentés dans Maazoun (2015) et ils étaient effectués à rebours (sens inverse du vol). Pour ce qui est de l'optimisation de la précision et du temps de calcul des schémas de discrétisation, nous nous sommes encore limités à la phase de croisière. Nous n'avons pas traité de l'amélioration des calculs sur les phases d'ascension initiale et de descente finale. Pour ce qui est des calculs des trajectoires en tenant compte des données issues des prévisions météorologiques, nous n'avons pas pris en considération les coûts liés au temps. Le coût de temps est nul dans nos simulations.

## **6.3 Améliorations futures**

Nous proposons de reprendre ces calculs en intégrant la phase d'ascension initiale, la phase de croisière et la phase de descente finale. Nous suggérons aussi de faire changer les valeurs du coût du temps dans les calculs. Les résultats sur l'amélioration de la précision et du temps de calcul dépendront des types de phase de vol ainsi que du coût du temps considérés. Une partie du travail qui porte sur l'utilisation des nouveaux schémas de calcul est d'effectuer l'interpolation en temps et en espace ainsi que le calcul de la densité en dehors du programme de calcul de la trajectoire optimale. Pour la partie qui porte sur l'utilisation des données issues des fichiers de prévisions météorologiques, nous proposons de refaire la même étude comparative déjà présentée, mais cette fois-ci, nous prendrions en considération le coût du temps dans les calculs. Comme mentionné précédemment, les trajectoires obtenues avec les calculs qui tiennent compte des données de la météo pour certains champs peuvent être non lisses et contenir un grand nombre de changements de palier. Pour cela, nous proposons de faire une procédure de lissage de ces trajectoires pour minimiser le nombre de changements de palier.

## RÉFÉRENCES

- AGAM, L. (2009). System for producing a flight plan. US Patent App. 12,331,454.
- BADA TEAM (2000). Aircraft performance operational files. [http://www.eurocontrol.int/sites/default/files/field\\_tabs/content/documents/sesar/bada-b763-opf.pdf](http://www.eurocontrol.int/sites/default/files/field_tabs/content/documents/sesar/bada-b763-opf.pdf).
- BERNAT, G., DAVIS, R., MERRIAM, N. et TUFFEN, J. (2007). Identifying opportunities for worst-case execution time reduction in an avionics system. *Ada User Journal*, 28, 189–94.
- COULMEAU, F. (2013). Method for optimizing a fuel consumption of an aircraft during the flight thereof. US Patent 8,437,887.
- COULMEAU, F., CAILLAUD, C. et PERSON, T. (2014). Method and system for dynamically managing a flight procedure of an aircraft flight plan. US Patent 8,655,507.
- COULMEAU, F. et DEKER, G. (2012). Method for updating meteorological information for an aircraft. US Patent 8,265,806.
- COULMEAU, F., DEKER, G. et GOUTELARD, H. (2013a). Method of optimizing a flight plan. US Patent 8,565,938.
- COULMEAU, F., PUTZ, G. et FRIEDMANN, O. (2013b). Method of estimating atmospheric data at any point of a path of an aircraft. US Patent 8,509,966.
- DIJKSTRA, E. W. (1959). A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, 1, 269–271.
- DOUGUI, N., DELAHAYE, D., PUECHMOREL, S. et MONGEAU, M. (2013). A light-propagation model for aircraft trajectory planning. *Journal of Global Optimization*, 56, 873–895.
- IATA ECONOMICS (2010). Airline fuel and labour cost share. Briefing, IATA.
- ENDO, Y., AMAYA, S. et SUMIZAWA, A. (2008). Travel time calculating method and traffic information display method for a navigation device. US Patent 7,376,509.
- GIRARDET (2014). *Détermination optimale et globale des trajectoires d'avions en présence de vent*. Thèse de doctorat, École Doctorale Aéronautique Astronautique, Toulouse France.
- GREEN, S., GRACE, M. et WILLIAMS, D. (2000). Flight test results : CTAS and FMS cruise/descent trajectory prediction accuracy. *3rd USA/Europe Air Traffic Management R&D Seminar Napoli, Italy*.
- LACOMBE, A., BLANCHON, X. et COULMEAU, F. (2014). Meteorological modelling method for calculating an aircraft flight plan. US Patent App. 12,633,508.

MAAZOUN, W. (2015). *Analyse et conception d'un système d'optimisation de plans de vol pour les avions*. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal.

NUIC, A. (2010). *User manual for the base of aircraft data (BADA)*. EUROCONTROL EXPERIMENTAL CENTRE, 3.8 édition.

NUIC, A., POINSOT, C., IAGARU, M.-G., GALLO, E., NAVARRO, F. A., QUEREJETA, C. et OTHERS (2005). Advanced aircraft performance modeling for atm : enhancements to the bada model. *24th Digital Avionics System Conference, Washington DC*.

PESTIEAU, M. (2012). Rapport de comparaison des résultats des algorithmes de calcul des coûts d'une arête en phase de croisière. Rapport technique.

SCHULTZ, R. L., SHANER, D. A. et PRATT, S. G. (2003). Four-dimensional route planner. *US PATENT*, 09,957,416.

SMITH, P. J., MCCOY, E., ORASANU, J., BILLINGS, C., DENNING, R., RODVOLD, M., VAN HORN, A. et GEE, T. (1995). Cooperative problem-solving activities in flight planning and constraints for commercial aircraft. *Systems, Man and Cybernetics, 1995. Intelligent Systems for the 21st Century., IEEE International Conference on*. IEEE, vol. 5, 4563–4568.

TANG, B. et MUKHERJEE, A. (2000). System and method for generating optimal flight plans for airline operations control. *US Patent* 6,134,500.